This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 481357

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QA
935
.G958

Digitized by Google

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES

FONDAMENTALES

DES VIBRATIONS.

Digitized by Google

48664 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

COURS ET CONFÉRENCES PUBLIÉS PAR LES SOINS DE L'ASSOCIATION DES ÉLÈVES
ET ANCIENS ÉLÈVES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES

FONDAMENTALES

DES VIBRATIONS

CONFÉRENCES FAITES EN 1911 AUX CANDIDATS
AU CERTIFICAT DE PHYSIQUE GÉNÉRALE,

PAR
A. Amédée GUILLET.

Notes de M. M. AUBERT,
Docteur ès sciences, Préparateur à la Faculté des Sciences de Paris.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins 55.

1913

Digitized by Google

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

Digitized by Google

PROPRIÉTÉS CINÉMATIQUES

FONDAMENTALES

DES VIBRATIONS.

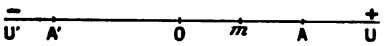
PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES VIBRATIONS.

MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL.

Loi du mouvement. — Soient, sur une droite dirigée, de sens positif U'U (*fig.* 1), un point fixe O et un point

Fig. 1.



mobile m dont la position est déterminée à chaque instant par sa distance u à l'origine O. Si la loi du mouvement de m est

$$u = a \sin \omega t, \tag{1}$$

a et ω étant des constantes, le point m est dit animé d'un *mouvement sinusoïdal* : u est le déplacement ou l'élongation du mobile à l'instant t.

La vitesse v et, puisque le mouvement est rectiligne,

266476

Digitized by Google

l'accélération γ, au même instant t, ont pour expression

$$(2) \qquad v = \frac{du}{dt} = a\omega \cos\omega t,$$

$$(3) \qquad \gamma = \frac{d^2 u}{dt^2} = -a\omega^2 \sin\omega t.$$

D'après la définition du sinus on a $|\sin\omega t| \leqq 1$, d'où, d'après la relation (1), $|u| \leqq |a|$. Par suite, en portant de part et d'autre de O une même longueur a, on obtient deux points A et A′ entre lesquels le mobile m se déplace indéfiniment par aller et retour : a est *l'amplitude* du mouvement sinusoïdal considéré.

Pour la valeur particulière du temps $t = t_1$, on a

$$u_1 = a \sin\omega t_1, \qquad v_1 = a\omega \cos\omega t_1, \qquad \gamma_1 = -a\omega^2 \sin\omega t_1.$$

Les trois grandeurs u, v, γ reprendront, avec $\sin\omega t_1$, $\cos\omega t_1$, et, pour la première fois, ces mêmes valeurs u_1, v_1, γ_1 à l'époque $t_1 + T$, telle que

$$\omega(t_1 + T) = \omega t_1 + 2\pi,$$

c'est-à-dire lorsqu'il se sera écoulé à partir de t_1 un temps

$$(4) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cette valeur T est indépendante de t_1 et par suite de la position spécifiée du point m. Le même état de mouvement se reproduira donc aux époques successives $t_1 + T$, $t_1 + 2T$, ..., $t_1 + nT$.

L'intervalle de temps T, ainsi défini, s'appelle *durée de la période*, *la période* elle-même étant l'ensemble des états de mouvement qui se produisent pendant le temps T.

Digitized by Google

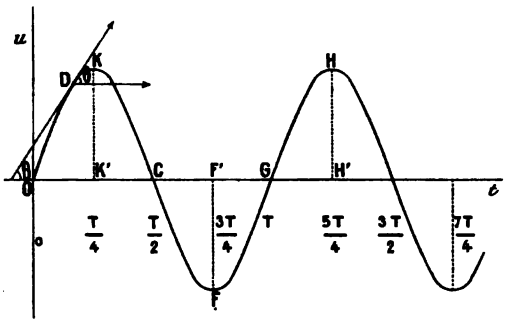
Au point de vue mécanique, ω est une vitesse angulaire, car $\frac{2\pi}{T}$ est le quotient d'un angle par un temps.

Diagramme du mouvement. — Traçons deux axes rectangulaires Ot et Ou et reprenons l'équation

$$u = a \sin \omega t.$$

On appelle *diagramme du mouvement* la courbe obtenue en portant en abscisses les temps et en ordonnées les élongations correspondantes. Cette courbe a, dans le cas présent, la forme indiquée (*fig.* 2).

Fig. 2.



Représentation de la vitesse et de l'accélération. — La tangente à la courbe en D fait avec Ot l'angle θ tel que $\operatorname{tang}\theta = \frac{du}{dt}$. On a donc

$$\operatorname{tang}\theta = v,$$

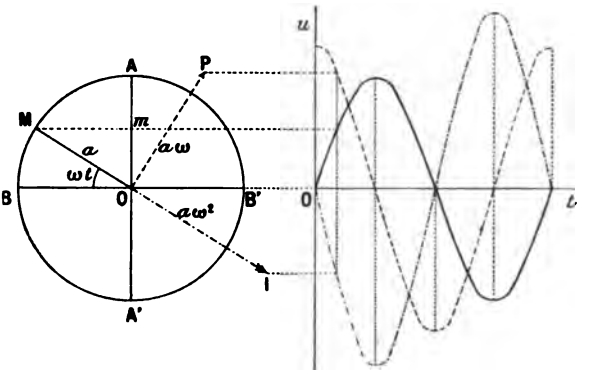
et l'on peut suivre la variation de la vitesse en répétant la construction de la tangente aux différents points de la courbe.

Les relations (1), (2) et (3) montrent, d'autre part, que

Digitized by Google

la vitesse v et l'accélération γ se représentent comme l'élongation u par des sinusoïdes. Mais les ordonnées de v et de γ sont respectivement les ordonnées de u multipliées par ω et ω^2, de plus les sinusoïdes relatives à v et γ sont

Fig. 3.



décalées suivant Ot, par rapport au diagramme du mouvement, des quantités $\frac{T}{4}$ pour v et $\frac{T}{2}$ pour γ (partie droite de la figure 3).

Relation entre l'élongation et l'accélération. — Les relations (1) et (3) exigent que le déplacement u soit solution de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0,$$

que l'on peut encore écrire

$$\mu \frac{d^2u}{dt^2} = -\mu\omega^2 u.$$

Sous cette forme on voit que la force f qui communique

Digitized by Google

à un point matériel de masse μ, le mouvement rectiligne sinusoïdal considéré, est telle que

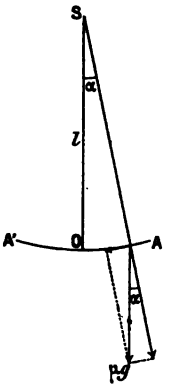
$$f = -\mu\omega^2 u. \tag{5}$$

C'est une force de signe contraire à u, c'est-à-dire toujours dirigée vers le point O, centre de la trajectoire, et proportionnelle à u.

Application au calcul de la période d'un système. — 1° *Période du pendule simple.* — Considérons le pendule simple formé par le point matériel m de masse μ suspendu au fil SO de longueur invariable l, mobile autour du point fixe S et écartons-le de sa position d'équilibre SO.

Supposons l'amplitude OA assez petite pour que l'on puisse confondre l'arc AA′ décrit par le mobile avec la tangente en O à cet arc (*fig.* 4), ce qui revient à négliger α^3 devant α.

Fig. 4.



Si, à un moment donné, α est l'angle d'écart supposé très petit, et g l'accélération de la pesanteur, comme la force f qui produit le mouvement est toujours de signe contraire

Digitized by Google

à u, on a

$$f = -\mu g \alpha.$$

Mais en posant $Om = u$, on a

$$u = l\alpha,$$

d'où

$$f = -\frac{\mu g}{l} u,$$

expression identique à (5) pour $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Comme $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ on a

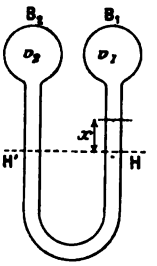
$$\frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

d'où

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2° *Période d'oscillation d'une colonne liquide.* — Deux ballons B_1 et B_2, remplis d'un gaz à la pression p_0, communiquent par un tube en U partiellement occupé par un

Fig. 5.



liquide. On provoque une dénivellation à partir du niveau primitif. Trouver la loi du mouvement du liquide en supposant les compressions et les détentes adiabatiques. On négligera les frottements.

Digitized by Google

Soient HH′ le niveau primitif; v_1 et v_2 les volumes occupés par le gaz dans les espaces B_1 et B_2; x la dénivellation produite et p_0 la pression initiale.

A la dénivellation est due la force motrice,

$$f = 2x \times s\rho g,$$

s étant la section uniforme du tube en U, ρ la masse spécifique du liquide et g l'accélération de la pesanteur.

Mais en B_1 et B_2 les volumes sont devenus respectivement $v_1 - sx$ et $v_2 + sx$, et les pressions p_1 (compression) et p_2 (décompression), d'où la force résultante

$$(p_1 - p_2)s.$$

La force motrice totale est donc

$$2s\rho gx + (p_1 - p_2)s.$$

La détente et la compression étant adiabatiques, on a

$$p_1(v_1 - sx)^\gamma = p_0 v_1^\gamma$$

et

$$p_2(v_2 + sx)^\gamma = p_0 v_2^\gamma,$$

avec $\gamma = \frac{C}{c}$, rapport des chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant, d'où l'on tire

$$p_1 = p_0\left(\frac{v_1}{v_1 - sx}\right)^\gamma = p_0\left(\frac{1}{1 - \frac{sx}{v_1}}\right)^\gamma$$
$$= p_0\left(1 - \frac{sx}{v_1}\right)^{-\gamma} = p_0\left(1 + \frac{s\gamma x}{v_1}\right),$$

en bornant aux deux premiers termes le développement de $\left(1 - \frac{sx}{v_1}\right)^{-\gamma}$, puisque sx est très petit par rapport à v_1.

Digitized by Google

De même

$$p_2 = p_0\left(1 - \frac{s\gamma x}{v_2}\right),$$

de sorte que

$$p_1 - p_2 = p_0 x s\gamma\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right).$$

La masse en mouvement est $sl\rho$, l étant la longueur de la colonne liquide.

Si donc on néglige les frottements, l'équation du mouvement est

$$sl\rho\frac{d^2x}{dt^2} = -2xs\rho g - (p_1 - p_2)s$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{\frac{2g}{l} + \frac{p_0 s\gamma}{l\rho}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)\right\}x = 0.$$

En exprimant p_0 en colonne du liquide, il vient

$$p_0 = h\rho g$$

et

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{2g}{l} + \frac{hsg\gamma}{l}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)\right]x = 0.$$

En identifiant enfin avec l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \varpi^2 u = 0,$$

on trouve, pour la valeur T de la période

$$T = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l} + \frac{hsg\gamma}{l}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}}.$$

Lorsque le tube est ouvert à l'air libre la période est

$$\tau = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{2g}{l}}}.$$

Digitized by Google

Pour déduire γ des deux relations précédentes, formons le rapport $\left(\frac{\tau}{T}\right)^2$. On a

$$\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 = 1 + \frac{hs\gamma}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\gamma = \left\{\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 - 1\right\}\frac{2v_1v_2}{hs(v_1+v_2)},$$

Application numérique. — Dans une expérience on obtient

$$v_1 = 1221,5, \qquad s = 3^{cm},856,$$
$$v_2 = 1194,6, \qquad \tau = 0^s,63,$$
$$h = 78^{cm},98, \qquad T = 0^s,543.$$

On a donc

$$\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 - 1 = 0,346,$$

$$\frac{2v_1v_2}{hs(v_1+v_2)} = 3,96,$$

d'où

$$\gamma = \frac{C}{c} = 1,37.$$

Les expériences ont porté sur 21 gaz.

Relation entre le mouvement rectiligne sinusoïdal et le mouvement circulaire uniforme. — Soient B (*fig.* 6) l'origine des arcs et M un mobile, parti de B au temps zéro, décrivant la circonférence de rayon a dans le sens BA avec une vitesse angulaire constante ω et, par suite, avec une vitesse linéaire

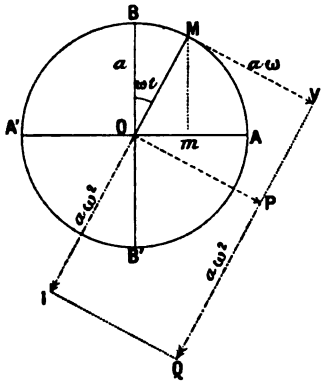
$$a\omega = MV.$$

Si par O nous menons le vecteur OP normal au rayon

Digitized by Google

OM, en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur ce rayon et équipollent au vecteur MV, le point P tourne avec la même vitesse angulaire que M et décrit une circonférence de rayon $a\omega$. Si nous

Fig. 6.



répétons cette même construction relativement au rayon OP, nous obtenons le vecteur $OI = a\omega^2$ tournant avec la vitesse angulaire ω, en avance de π sur OM et qui représente l'accélération du mouvement circulaire considéré.

Projetons le point M en m sur le diamètre fixe AA' perpendiculaire à BB'. On a

$$Om = a \sin \omega t;$$

donc m est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal; d'autre part

$$\overline{Mm} = a \cos \omega t$$

et

$$v = a\omega \cos \omega t = \omega \overline{Mm};$$

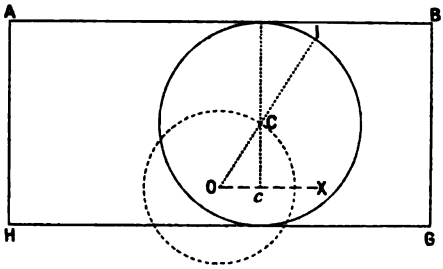
donc, au facteur constant près ω, $\overline{mM}$ représente la vitesse v du point m.

Digitized by Google

Les projections des points M, P et I sur l'axe A'A font ainsi connaître, à chaque instant, les éléments u, v, y du mouvement rectiligne sinusoïdal du point m.

Réalisation cinématique du mouvement sinusoïdal. — Excentrique à cadre, etc. — Des glissières verticales assujettissent les côtés verticaux du cadre ABGH à glisser sur eux-mêmes (*fig.* 7). Un excentrique de centre C, de point

Fig. 7.



fixe O, tel que $OC = a$ et de rayon $CI = R$, est tangent aux côtés horizontaux. Quand l'excentrique tourne uniformément, chacun des points du rectangle subit un déplacement rectiligne égal au déplacement vertical Cc du point C.

Rapportons ces déplacements à l'horizontale OX. Soit $\widehat{XOC} = \omega t$, ω étant la vitesse angulaire constante de l'excentrique. On a

$$Cc = a \sin \omega t.$$

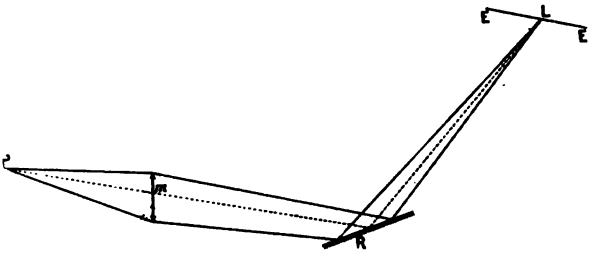
Le mouvement obtenu est donc rectiligne sinusoïdal et d'amplitude a. Pour faire varier a, il suffit de changer la position de l'axe fixe O.

Expériences. — 1° Une lentille convergente m (*fig.* 8) est portée par un excentrique à cadre et donne sur l'écran E,

Digitized by Google

par l'intermédiaire du miroir R, une image L du point lumineux P. Faisons tourner d'un mouvement uniforme à la fois l'excentrique et le miroir R, l'image L décrit alors une

Fig. 8.



sinusoïde que l'on voit *point par point* si les mouvements de rotation sont assez lents, et que l'on pourrait supposer tracée à l'avance sur le tableau.

2° Tracé optique d'une sinusoïde au moyen d'un pendule oscillant sous faible amplitude.

3° Tracé optique d'une sinusoïde au moyen du diapason. Rôle de la persistance des impressions sur la rétine.

Phase. — Il y a une coordonnée spéciale, à laquelle on a donné le nom de *phase*, qui caractérise l'apparition de chacun des états successifs du mouvement sinusoïdal.

Par exemple, pour le mouvement $u = a \sin \omega t$, cette coordonnée est ωt. Qu'il s'agisse des états relatifs à une même période ou d'états relatifs à des périodes différentes, il ne peut jamais y avoir ambiguïté. La valeur de ωt fait connaître tout à la fois le rang de la période à laquelle appartient l'état de mouvement considéré et la phase de cet état dans la période spécifiée.

Deux mouvements tels que

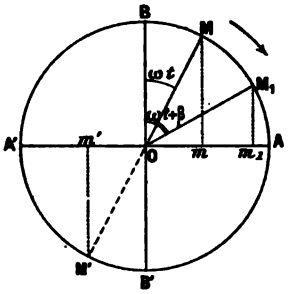
$$u = a \sin \omega t, \qquad u_1 = a_1 \sin(\omega t + \beta)$$

Digitized by Google

ont pour phases respectives, à l'instant t, ωt et $\omega t + \beta$. Leur différence de phase β est indépendante du temps.

On voit sur la figure 9, où l'on a supposé $a = a_1$, com-

Fig. 9.



ment s'interprète la phase dans la représentation du mouvement sinusoïdal à l'aide du mouvement circulaire uniforme.

Dans le cas particulier où $\beta = \pi$, les points M et M' sont diamétralement opposés, les points m et m' occupent toujours des positions symétriques par rapport à O. De plus, si $a = a_1$ leurs vitesses sont toujours égales et de signes contraires.

On s'exercera à trouver d'autres différences de phase remarquables.

Dans la représentation par diagramme, une variation de la phase, de β par exemple, entraîne une translation du diagramme suivant l'axe Ot.

Si deux mobiles m_1, m_2 sont animés de mouvements sinusoïdaux de même période T, présentant une différence de phase constante β (*fig.* 10) et ayant respectivement pour amplitudes a_1 et a_2, il est évident que ces mobiles seront en coïncidence sur $x'x$ chaque fois que la droite $M_1 M_2$ sera perpendiculaire à $x'x$.

Digitized by Google

Calculons l'élongation correspondante $Om_{1,2}$. On a par projection de OM_1 et de OM_2 sur $x'x$

$$a_1 \cos\alpha = a_2 \cos(\alpha + \beta)$$

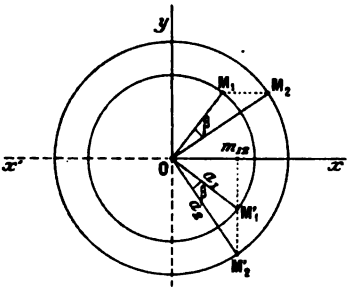
d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a_2 \cos\beta - a_1}{a_2 \sin\beta}.$$

Par suite

$$Om_{1,2} = a_1 \cos\alpha = \frac{a_1 a_2 \sin\beta}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\beta}}.$$

Fig. 15.



La distance $\delta = 2Om_{1,2}$ des deux points de coïncidence étant relevée expérimentalement ainsi que a_1 et a_2, on déduit, de la formule précédente, la différence de phase β des deux mouvements.

Exercices. — 1. Un mouvement sinusoïdal

$$u = a \sin(\omega t + \beta),$$

considéré isolément, peut toujours être écrit

$$u = a \sin \omega t'.$$

Il suffit, pour cela, de satisfaire à la condition

$$\omega t' = \omega t + \beta,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire de faire en sorte que

$$t' = t + \frac{\beta}{\omega}.$$

Il faut donc changer le zéro des temps et prendre comme origine des temps t' l'époque à laquelle le temps t a pour mesure $-\frac{\beta}{\omega}$.

II. Le mouvement qui a pour loi

$$u = A \sin \omega t + B \cos \omega t \tag{1}$$

est un mouvement sinusoïdal dont on demande de calculer l'amplitude et la phase.

Écrivons u sous la forme

$$A\left(\sin \omega t + \frac{B}{A} \cos \omega t\right).$$

En posant

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tang} \beta,$$

ce qui est toujours possible, il vient

$$u = A(\sin \omega t + \operatorname{tang} \beta \cos \omega t),$$

ou encore

$$u = \frac{A}{\cos \beta} \sin(\omega t + \beta).$$

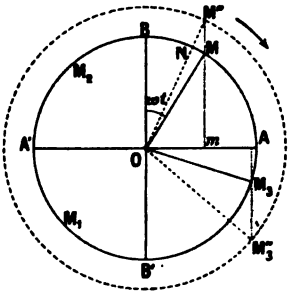
En conséquence (1) est la loi d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = \frac{A}{\cos \beta} = \sqrt{A^2 + B^2}$ et de phase $\omega t + \beta$, l'angle β étant déterminé par la condition

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{B}{A}.$$

Digitized by Google

Effet d'une variation instantanée de la vitesse sur l'amplitude et la phase. — Le mobile étant en m (*fig.* 11) à

Fig. 11.



l'instant t, sa vitesse est représentée par $\omega . \overline{mM}$. Si, à l'instant t, la vitesse du mobile passe brusquement de v à $v + \varepsilon$, le point M se déplace de M en M'' le long de mM et l'on a $MM'' = \frac{\varepsilon}{\omega}$. Si, après l'impulsion, le mouvement conserve la période T, m sera la projection sur A'A du mobile M'' décrivant la circonférence de rayon OM'' avec la vitesse angulaire ω. L'impulsion a donc fait passer l'amplitude de OM à OM'' et la phase de $\widehat{BOM}$ à $\widehat{BOM''}$. Si l'impulsion a lieu au passage de m en O, M se déplace le long de OB et la phase reste invariable.

Pour une variation ε ayant même signe que v, il y a *retard* de phase, dans les quadrants M et M_1 et *avance* de phase dans les quadrants M_3 et M_2.

On peut aussi suivre le phénomène sur le diagramme (*fig.* 2) car produire une impulsion en D revient à faire tourner, autour de son point de contact, la tangente en D au diagramme, et à continuer celui-ci en partant de la nouvelle position de la tangente.

Digitized by Google

Exercice. — 1° Un mobile m est animé d'un mouvement sinusoïdal $u = a \sin \omega t$; lorsque le mobile passe par $u = u_1$, on fait varier brusquement la vitesse v d'une quantité ε. Calculer la nouvelle amplitude du mouvement et sa différence de phase par rapport à l'ancien (*fig.* 11).

Posons

$$\mathrm{M}m = y, \qquad \mathrm{MM}' = \eta.$$

La vitesse v_1 de m est, après l'impulsion,

$$v_1 = v + \varepsilon = \omega \overline{\mathrm{M}'m} = \omega(y + \eta).$$

Or

$$\operatorname{tang} \mathrm{M}'\mathrm{O}m = \frac{y + \eta}{u_1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang} \mathrm{M}\mathrm{O}m = \frac{y}{u_1},$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang}(\mathrm{M}\mathrm{O}m - \mathrm{M}'\mathrm{O}m) = \frac{-\eta u_1}{a^2 + \eta \sqrt{a^2 - u_1^2}},$$

en remarquant que $y^2 = a^2 - u_1^2$.

Or $\eta = \frac{\varepsilon}{\omega}$, donc

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{-\varepsilon u_1}{a^2 \omega + \varepsilon \sqrt{a^2 - u_1^2}}.$$

Soit a_1 la nouvelle amplitude, on a

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \mathrm{OM}'^2 = u_1^2 + m\mathrm{M}'^2 \\ &= u_1^2 + \left(\sqrt{a^2 - u_1^2} + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)^2 = a^2 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + \frac{2\varepsilon}{\omega}\sqrt{a^2 - u_1^2}. \end{aligned}$$

On voit que a_1 sera maximum pour $u_1 = 0$, dans ce cas la variation d'amplitude sera $\frac{\varepsilon}{\omega}$ et la variation de phase nulle, toutes choses manifestées par la figure 11.

2° Discuter les résultats précédents en prenant u_1 comme

Digitized by Google

variable et examiner le cas où ε serait de sens contraire à v.

Énergie. — Si un point matériel de masse μ est animé d'un mouvement de loi

$$u = a \sin \omega t,$$

sa vitesse est à chaque instant

$$v = a\omega \cos \omega t = \omega \sqrt{a^2 - u^2},$$

ou encore

$$v^2 = V^2 - \omega^2 u^2,$$

en désignant par V la plus grande valeur de la vitesse v.

D'autre part, la force qui agit sur le point (5) a pour expression

$$f = -\mu\omega^2 u.$$

L'énergie cinétique w de la masse μ dans la position m est par définition

$$w = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu(V^2 - \omega^2 u^2),$$

et son énergie potentielle mesurée par le travail que peut effectuer la force agissante quand la masse μ passe de m à O (*fig.* 1) est

$$U = \int_u^0 f\,du = -\mu\omega^2 \int_u^0 u\,du = \frac{1}{2}\mu\omega^2 u^2.$$

L'énergie totale $W = \frac{1}{2}\mu V^2$ se met ainsi sous la forme

$$W = w + U,$$

et l'on en peut suivre aisément le partage à chaque instant sur les expressions de w et de U.

Digitized by Google

Exercice. — Construire les courbes représentant les variations de w et de U et calculer l'aire d'une période de la courbe.

Énergie cinétique moyenne. — A l'instant t, l'énergie cinétique du mobile m a pour expression

$$w = \frac{\mu}{2} a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t.$$

Comme la valeur moyenne de w, relative à une période, est donnée par l'intégrale

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T w\, dt,$$

on a

$$W_m = \frac{1}{4} \mu u^2 \omega^2 = \frac{1}{4} \mu V^2 = \pi^2 \mu a^2 N^2,$$

N étant la fréquence du mouvement vibratoire; W_m est l'aire de la courbe w relative à l'unité de temps.

L'énergie cinétique moyenne de m est donc égale à la moitié de l'énergie totale du système.

Il en est de même de l'énergie potentielle moyenne.

Généralisation. — Les notions précédentes, convenablement interprétées, s'étendent à tout phénomène dont la loi est sinusoïdale.

Exemple : Courant alternatif. — Les phénomènes d'induction permettent d'engendrer des f. é. m. de loi

$$e = e_0 \sin \omega t$$

qui déterminent dans les circuits qu'elles alimentent des courants de la forme

$$i = i_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Digitized by Google

La différence de phase φ, entre la f. é. m. e et l'intensité i, dépend des conditions d'établissement des circuits : résistance, self-induction, capacité, fréquence des pulsations du générateur.

On aura encore à considérer l'intégrale de puissance

$$\frac{1}{T}\int_0^T ei\,dt = \frac{1}{2}e_0 i_0 \cos\varphi$$

qui correspond à l'énergie cinétique moyenne du mouvement vibratoire.

La condition $\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = i^2_{\text{eff.}}$ définit l'intensité du courant constant équivalent au courant alternatif au point de vue de l'effet Joule, et la condition $\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt = e^2_{\text{eff.}}$ définit la force constante équivalente à celle du courant alternatif au point de vue du couple appliqué à l'aiguille d'un électromètre monté idiostatiquement. Le courant et la force électromotrice ainsi calculés se nomment courant et force électromotrice *efficaces*.

Comme exercice et pour expliciter le rôle des facteurs qui influent sur la différence de phase φ, résolvons le problème suivant :

Problème. — Un cylindre de longueur $2l$ et de rayon R, portant une charge de densité σ, est contraint à osciller autour de son axe suivant la loi $\theta = \theta_0 \sin \omega t$. Trouver la loi du courant induit dans un cerceau de n spires entourant le milieu du cylindre.

Le flux embrassé par un cerceau de n spires entourant le milieu du cylindre a pour expression

$$\Phi = 4\pi^2 n R^3 \sigma (1+\varepsilon)\theta' \qquad \text{ou} \qquad A\theta';$$

Digitized by Google

la force électromotrice induite dans le cerceau sera donc

$$e = A\omega^2\theta_0 \sin\omega t \qquad \text{ou} \qquad k \sin\omega t;$$

elle est proportionnelle *au carré de la fréquence* de l'oscillation du cylindre.

Si C désigne la capacité d'un condensateur inséré dans le circuit induit de résistance ρ et de self-induction L, l'intensité i du courant induit est déterminée par l'équation

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \rho\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = k\omega\cos\omega t,$$

dont la solution de régime est

$$i = \frac{k\omega}{\sqrt{\rho^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}}\cos(\omega t - \beta),$$

avec

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2}.$$

En choisissant le condensateur de façon que la condition dite de *résonance*

$$\frac{1}{C} = L\omega^2$$

soit satisfaite, on obtient le courant induit, compatible avec les autres facteurs de l'expérience, dont l'intensité maximum est la plus grande.

On a

$$i_{\text{max.}} = \frac{e_{\text{max.}}}{\rho},$$

et le courant i se développe dans le temps comme l'élonga-

Digitized by Google

tion angulaire θ et sans présenter de différence de phase avec cette élongation.

Le courant inducteur total

$$I = \theta_0 \omega R \sigma . 2 l \cos \omega t$$

présente au contraire avec θ une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$.

On remarquera que *la capacité* C *à choisir varie en raison inverse du carré de la fréquence* de l'oscillation du conducteur électrisé.

En faisant tendre C vers l'infini, on obtient l'équation

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \rho i = k \sin \omega t,$$

relative au cas où le circuit induit ne renferme pas de condensateur; on a alors

$$i_1 = \frac{k}{\sqrt{\rho^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \gamma)$$

avec

$$\operatorname{tang} \gamma = -\frac{\rho}{L\omega}.$$

En intercalant le condensateur de capacité $C = \frac{1}{L\omega^2}$ la valeur maximum du courant qui était d'abord $\frac{k}{\rho\sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{\rho^2}}}$ devient

$$i_{max.} = i_{1max.} \sqrt{1 + \frac{L^2 \omega^2}{\rho^2}}.$$

Le facteur de multiplication $\sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{\rho^2}}$ peut être rendu relativement considérable en raison des *fréquences assez*

Digitized by Google

élevées qu'on peut espérer obtenir au moyen des corps vibrants.

Avec les données suivantes, d'une réalisation possible, $R' = 103^{mm}$, $R = 100^{mm}$, $n = 3000$, $\omega = 2\pi \times 100$, $E = 4000$ volts et $\theta_0 = \frac{1}{3}$ de radian, le maximum de la force électromotrice induite serait de l'ordre de 10^{-5} volt.

Après redressement le courant induit aurait donc pour intensité

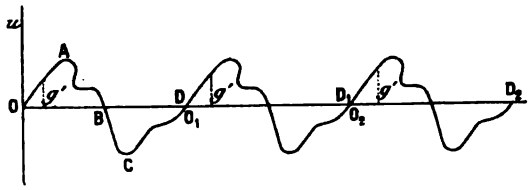
$$i_{red.} = \frac{2}{\pi} \frac{e_{max.}}{\rho} \qquad \left(\text{soit } \frac{1,27 \times 10^{-5}}{\rho^{ohm}} \text{ ampère environ}\right).$$

On s'exercera à la représentation graphique des résultats précédents.

Importance du mouvement sinusoïdal. — Tout d'abord ce mouvement intervient directement dans l'explication d'un grand nombre de phénomènes. Mais il y a plus.

Si, construisant le diagramme d'un mouvement donné, il arrive que ce diagramme se compose de parties *identiques*, indéfiniment répétées, le mouvement est périodique. Ainsi le diagramme (*fig.* 12) se composant d'une série de courbes

Fig. 12.



OACD, obtenues en faisant glisser l'une d'elles de longueurs égales $OD = O_1D_1 = O_2D_2 = \ldots$, représente un mouvement périodique de période OD.

Digitized by Google

Fourier a démontré que la loi $y = f(t)$ d'un mouvement périodique de période T, peut s'exprimer par une série dont les termes représentent des mouvements sinusoïdaux de périodes T, $\frac{T}{2}, \ldots, \frac{T}{n}$. Alors

$$y = f(t) = \Sigma a_k \sin(K\omega t + \varphi_k),$$

a_k étant l'amplitude du mouvement de période T_k et φ_k sa phase à l'instant zéro.

Il est avantageux parfois de substituer à la loi $y = f(t)$ le développement précédent qui lui est équivalent au point de vue mathématique.

Ces mêmes considérations s'appliquent évidemment à tout phénomène de loi $y = f(z)$ (y et z étant deux grandeurs quelconques) admettant la période naturelle ou provoquée Z.

Calcul des coefficients du développement de Fourier. — Partons de l'expression de Fourier

$$f(z) = \Sigma a_k \sin(K\omega z + \varphi_k).$$

En développant les termes du second membre, il vient

$$f(z) = \Sigma a_k \cos\varphi_k \sin K\omega z + \Sigma a_k \sin\varphi_k \cos K\omega z$$

ou

$$\Sigma M_k \sin K\omega z + \Sigma N_k \cos K\omega z;$$

si l'on pose

$$M_k = a_k \cos\varphi_k, \qquad N_k = a_k \sin\varphi_k.$$

Les coefficients M_k et N_k étant connus, le calcul de a_k et φ_k sera immédiat puisque

$$\operatorname{tang}\varphi_k = \frac{M_k}{N_k} \qquad \text{et} \qquad a_k^2 = M_k^2 + N_k^2.$$

Digitized by Google

Remarque. — Si Z est la période $\frac{2\pi}{\omega}$ de $f(z)$, on a respectivement

$$\int_z^{Z+z} \sin K\omega z\, dz = 0, \qquad \int_z^{Z+z} \cos K\omega z\, dz = 0$$

et

$$\int_z^{Z+z} \sin^2 K\omega z\, dz = \frac{Z}{2}, \qquad \int_z^{Z+z} \cos^2 K\omega z\, dz = \frac{Z}{2}.$$

D'autre part, pour $K \gtrless j$, on a

$$\int_z^{Z+z} \sin K\omega z \sin j\omega z\, dz = 0, \quad \int_z^{Z+z} \cos K\omega z \cos j\omega z\, dz = 0,$$

$$\int_z^{Z+z} \sin K\omega z \cos j\omega z\, dz = 0.$$

Calcul des coefficients M_k, N_k. — Cela posé, si $f(z)$ est mis sous la forme

$$\begin{aligned} f(z) = M_0 + M_1 \sin\omega z + N_1 \cos\omega z + \ldots \\ + M_k \sin K\omega z + N_k \cos K\omega z + \ldots, \end{aligned}$$

on voit que pour déterminer un coefficient tel que M_k il suffira de multiplier les deux membres de l'égalité par $\sin K\omega z$ et d'intégrer entre z et $z + Z$; il vient alors, les intégrales intermédiaires étant nulles d'après la remarque faite plus haut,

$$\int_z^{Z+z} f(z) \sin K\omega z\, dz = M_k \int_z^{Z+z} \sin^2 K\omega z\, dz = M_k \frac{Z}{2}.$$

Donc

$$M_k = \frac{2}{Z} \int_0^Z f(z) \sin K\omega z\, dz.$$

Digitized by Google

On a de même

$$N_k = \frac{2}{Z}\int_0^Z f(z)\cos K\omega z\,dz$$

et

$$M_0 = \frac{1}{Z}\int_0^Z f(z)\,dz.$$

Ce calcul permet de passer de la loi périodique $y = f(z)$ à la représentation de cette loi par une somme en nombre fini ou infini de fonctions harmoniques de périodes respectives $Z, \frac{Z}{2}, \frac{Z}{3}, \ldots, \frac{Z}{k}, \ldots$.

Il importe de se bien pénétrer qu'un phénomène périodique satisfaisant aux conditions du théorème de Fourier (*voir* un Traité d'Analyse), quelle qu'en soit la complexité, peut être considéré, au point de vue mathématique, comme résultant de la superposition de phénomènes de même nature repésentés par des fonctions sinusoïdales (harmoniques de la période du phénomène) explicitées par le calcul précédent.

Analyse stroboscopique d'un phénomène périodique sinusoïdal ou non. — Si un phénomène, de période T, est rendu visible seulement aux époques $\tau + n\mathrm{T}$, τ étant constant et n entier, il apparaîtra évidemment toujours sous le même aspect. Pour l'observateur, le phénomène se trouvera ainsi fixé dans l'un de ses états. En faisant varier τ de t à $t + \mathrm{T}$, on manifestera successivement tous les aspects du phénomène.

Plus généralement, s'il s'agit d'une grandeur g, on pourra la diriger, dans un récepteur approprié, aux époques $\tau + n\mathrm{T}$, c'est-à-dire chaque fois qu'elle repasse par le même état g'. On obtiendra ainsi soit une mesure statique de g',

Digitized by Google

soit l'effet d'impulsion dû à la répétition périodique de l'action g' sur le récepteur.

Si la période T′ des éclairs (ou des réceptions instantanées) est différente de T mais voisine, soit $T' = T + \varepsilon$, les éclairs se produiront aux époques $\tau + n(T + \varepsilon)$ ou $\tau' + nT$, si l'on pose $\tau' = \tau + n\varepsilon$.

La période sera entièrement explorée si τ' varie d'une manière continue de T, alors n varie de la quantité ν définie par la condition $\nu\varepsilon = T$. Il se produira donc $\nu = \frac{T}{\varepsilon}$ éclairs au cours de l'exploration de la période, ce qui exige un temps $\nu T'$ ou $\frac{TT'}{\varepsilon}$.

La période apparente du phénomène a donc pour durée $\frac{TT'}{\varepsilon}$, d'où la fréquence apparente $|N - N'|$ en désignant par N la fréquence du phénomène et par N′ celle des éclairs.

Dans le cas où ε est positif, les éclairs présentent un *retard* sur le phénomène, on voit donc celui-ci se dérouler dans son sens naturel, mais avec une période apparente $\frac{TT'}{\varepsilon}$, soit 1000 T′ pour $\varepsilon = \frac{T}{1000}$.

Lorsque ε est négatif, les éclairs 1, 2, 3, etc., présentent les *avances* 1ε, 2ε, 3ε, etc. sur g', en sorte que le phénomène étant saisi de plus en plus tôt par chacun des éclairs, présentera ses diverses phases à rebours de leur développement naturel.

Expériences. — 1° Les éclairs sont produits au moyen d'un disque-écran monté sur l'arbre d'un moteur et muni de trous régulièrement répartis sur des circonférences ayant leurs centres sur l'axe de rotation. Si l'on a besoin d'un éclair couvrant une grande surface, on projette l'image des

Digitized by Google

charbons de l'arc sur la circonférence utilisée et on épanouit le faisceau en le recevant sur une lentille à court foyer. La période des éclairs T′ est égale au temps que met un trou à se substituer au trou précédent sur le faisceau de lumière. Il faut pouvoir régler la vitesse du moteur et maintenir celle-ci invariable (freinage).

Stroboscopie du mouvement d'un diapason, d'une corde vibrante, etc.;

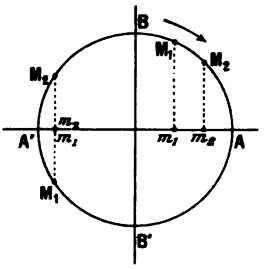
Stroboscopie de la veine liquide de Savart.

2° Stroboscopie du mouvement d'un pendule de torsion de période T recevant les éclairs d'un second pendule de torsion de période voisine T′. Auto-stroboscopie d'un pendule à l'étincelle condensée.

3° Relever les indications d'un électromètre capillaire dont les bornes sont mises en communication avec celles d'un cadre tournant dans un champ magnétique uniforme, chaque fois que le cadre passe par la même position arbitrairement choisie.

Coïncidences dans les mouvements sinusoïdaux. — Considérons deux mobiles M_1 et M_2 décrivant, d'un mouvement

Fig 13.



uniforme, une même circonférence de rayon a, dans les temps respectifs T_1 et T_2 et *dans le même sens* (*fig.* 13).

Digitized by Google

Soient m_1 et m_2 leurs projections sur un même diamètre AA'; ces mobiles projections exécutent des mouvements vibratoires sinusoïdaux d'amplitude a et de périodes T_1, T_2.

Les deux mobiles partent de B dans le même sens à l'instant zéro par exemple. Les périodes T_1 et T_2 étant différentes, les deux points se séparent, M_2 prend le devant si l'on a

$$T_2 < T_1. \tag{1}$$

Pour que les deux mobiles *repassent* ensemble en B un temps Θ plus tard, il faut que ce temps soit à la fois un multiple de T_1 et de T_2. On devra donc avoir

$$\Theta = pT_1 = qT_2,$$

ou encore

$$|T_1| - |T_2| = \left(1 - \frac{p}{q}\right)|T_1| = \left(\frac{q-p}{q}\right)|T_1|,$$

Θ sera la *période des coïncidences* en B pour les mobiles M_1 et M_2 et en O pour les mobiles m_1 et m_2, si p et q sont deux nombres premiers entre eux.

La condition pour que les coïncidences soient mathématiquement possibles est donc

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{q}{p}.$$

Les périodes doivent être commensurables. La période Θ relative aux coïncidences est alors

$$pT_1 \quad \text{ou} \quad qT_2.$$

Il est à remarquer que M_2 fait $q - p$ tours de plus que M_1 entre deux coïncidences en B.

Si $p = 100$, $q = 101$,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{101}{100} = 1 + \frac{1}{100},$$

Digitized by Google

les deux points m_1 et m_2 passeront en même temps et dans le même sens en O aux époques

$$0, \quad 100T_1, \quad 200T_1, \quad \ldots, \quad N100T_1,$$

qui correspondent aux coïncidences en B des mobiles M_1 et M_2.

Fausses coïncidences. — Mais il y a de *fausses coïncidences directes*, c'est-à-dire des passages simultanés de m_1 et m_2 en un même point de AA′ et dans le même sens ailleurs qu'en O. Il faut en effet que M_2 gagne $q-p$ tours pour rejoindre M_1 en B. Chaque fois qu'il gagne un tour, il faut qu'il passe sur M_1. Il y a alors coïncidence sur la circonférence entre M_1 et M_2, m_1 passera en même temps sur m_2; et de plus les déplacements des projections ont lieu dans le même sens puisque M_1 et M_2, pendant un temps infiniment petit, se déplacent ensemble, et cela se reproduira $q-p-1$ fois entre deux coïncidences en B.

Les *fausses coïncidences inverses* pour m_1 et m_2 correspondent au cas où les mobiles M_1 et M_2 arrivent ensemble aux points extrêmes d'une corde perpendiculaire à AA′.

Exercice. — Étudier le polygone formé par les points de coïncidence M_1, M_2 pour les diverses valeurs du rapport des périodes T_1 et T_2. Cas général, application des résultats aux cas expérimentaux.

Application au diapason et au pendule. — Les mouvements des deux pendules P_1 et P_2 qui oscillent sous une *faible* amplitude a, sont représentés par ceux des mobiles m_1 et m_2. Deux pendules qui s'écartent ensemble de la verticale, y repasseront donc, et dans un même sens, chaque fois qu'il se sera écoulé un temps

$$\Theta = pT_1 = qT_2.$$

Digitized by Google

Pour les coïncidences en verticale, les amplitudes peuvent différer puisqu'elles ne figurent pas dans la condition précédente.

Ces pendules, pour l'amplitude a, coïncident en dehors de la verticale pour les fausses coïncidences de m_1 et m_2, c'est-à-dire $q-p-1$ fois entre deux coïncidences *en verticale*.

Pendant la durée Θ, le pendule P_2 gagne sur P_1, $q-p$, oscillations complètes. Si l'on compte

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad \nu \text{ coïncidences},$$

P_1 aura fait

$$\nu p = N_1 \text{ oscillations},$$

et P_2

$$N_1 + \nu(q-p) = N_2. \tag{1}$$

Remarque. — Pour $q = p + 1$, cas toujours *approximativement* réalisé, lorsque les durées T_1 et T_2 sont très voisines, il vient

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{1}{p}.$$

L'observation fournit alors N_1 et $N_1 + \nu$

$$N_1 T_1 = (N_1 + \nu) T_2,$$

d'où le rapport des durées T_1 et T_2.

Dans le cas général (1) il ne suffirait pas, pour obtenir ce rapport, de compter N_1 et ν, il faut encore compter q et p entre deux coïncidences.

Expérience. — Les coïncidences de deux pendules de périodes voisines ont été obtenues en relevant les positions qu'occupe, sur une règle divisée éclairée, un index porté par l'un des pendules et observé à travers une fente décou-

Digitized by Google

verte par le second pendule chaque fois que celui-ci passe par sa position d'équilibre.

Exercices. — 1. Au moyen d'une lentille et d'un miroir m_1 on projette l'image d'une première fente fixe f_1 sur une seconde fente fixe f_2; au moyen d'une seconde lentille et d'un miroir m_2 on projette l'image de f_2 sur un écran. Qu'apercevra-t-on sur l'écran si les miroirs oscillent suivant la loi sinusoïdale autour d'axes parallèles à la direction commune des fentes, selon la valeur du rapport des périodes vibratoires de m_1 et m_2? (*Voir* G. Lippmann, *J. de Phys.*, 1887.) Vérification expérimentale au moyen de deux diapasons.

2. Un pendule étant donné, on détermine, par voie photographique, à deux époques e_1, e_2, les amplitudes a_1, a_2 de ses oscillations, ainsi que les élongations x_1, x_2 en grandeur et sens. Déduire de ces données la fraction d'oscillation battue par le pendule dans l'intervalle de temps e_1, e_2.

(G. Lippmann.)

PRODUCTION DE FRÉQUENCES VIBRATOIRES ÉLEVÉES.

Il n'est pas toujours possible d'obtenir des fréquences élevées avec un système qui oscille naturellement après avoir été dérangé de sa position d'équilibre.

Raisonnons sur le pendule simple : la durée de sa période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi N = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{et} \qquad l = \frac{g}{4\pi^2 N^2},$$

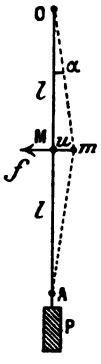
Digitized by Google

N étant la fréquence, c'est-à-dire le nombre de vibrations par unité de temps.

Si l'on voulait construire un pendule simple tel que $N = 30$, on serait conduit à lui donner la longueur $l = 0^{cm},027$. Un tel pendule est déjà d'une réalisation difficile, *a fortiori* il serait impossible de construire un pendule dont la fréquence correspondrait au la_3 normal pour lequel $N = 435$.

Toutefois on peut réaliser un système pendulaire à fréquence relativement élevée en empruntant la force motrice à la pesanteur par l'artifice suivant : un fil de masse négligeable, fixé en un point O (*fig.* 14) tendu par un poids P,

Fig. 14.



glisse dans un très petit anneau fixe A. Ce fil, de longueur $2l$, porte en son milieu un point matériel M de masse μ. Écartons le système de sa position d'équilibre OA d'un angle α. Comme la tension est la même tout le long du fil, la force qui tend à ramener le point M à sa position initiale, est

$$f = -2P\sin\alpha \qquad \text{ou} \qquad -2P\alpha$$

pour α petit.

La force f est de même forme que celle qui agit sur le

Digitized by Google

pendule (p. 5) mais elle croît avec le poids P qui est ici arbitraire et indépendant de μ.

Si u désigne l'élongation de M, l'équation du mouvement est

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} = -2 P \alpha$$

ou encore

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} = -2 P \frac{u}{l},$$

puisque

$$\alpha = \frac{u}{l},$$

Le mouvement de M est sinusoïdal, et en procédant par identification (p. 6), on a

$$\omega^2 = \frac{2 P}{\mu l},$$

d'où

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu l}{2 P}}, \qquad \text{soit} \quad 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\mu}{2 M'}},$$

en posant $P = M' g$.

Si le poids tenseur P croît, la période T diminue et l'on peut obtenir ainsi des fréquences beaucoup plus élevées que celles que l'on réalise avec le pendule ordinaire. Le facteur de multiplication est ici $\sqrt{\frac{\mu}{2 M'}}$.

Dans le pendule, on n'a pas la ressource de substituer un corps lourd à un corps léger, du platine à du liège par exemple, car la masse augmente alors dans le même rapport que la force motrice, et par suite la période ne change pas.

Équation des cordes vibrantes. — Nous sommes ainsi tout naturellement conduits au *problème de la corde vi-*

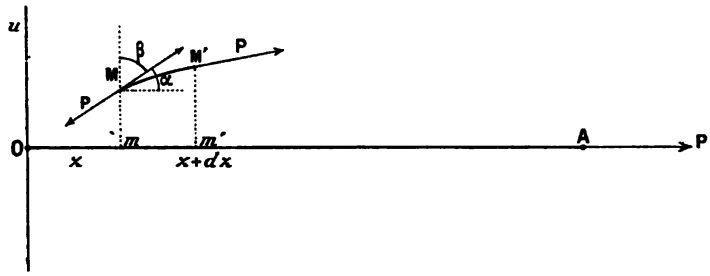
Digitized by Google

brant transversalement, problème dans lequel, en première approximation, l'élasticité n'intervient pas.

Soit un fil homogène et *sans rigidité* tendu par un poids P. Écartons-le de sa position d'équilibre. La masse à entraîner au retour est celle des différents éléments du fil et nous sommes ramenés, pour chaque élément, à un problème analogue au précédent. Mais, *par suite de la forme curviligne que prend, en général, la corde*, la force motrice transversale varie avec la position de l'élément sur la courbe.

Dans le plan décrit par la corde, traçons deux axes rectangulaires OZ et OU (*fig.* 15) et cherchons comment le déplacement u de l'élément MM′ de longueur ds est lié à la coordonnée z de l'élément. La projection sur OU de la tension P en M a pour valeur

Fig. 15.



$$P\frac{du}{ds},$$

puisque la tension P est dirigée suivant la tangente en M à la corde, et que cette tangente fait avec OU un angle β tel que

$$\cos\beta = \frac{du}{ds},$$

mais ds et dz sont des infiniment petits équivalents car,

Digitized by Google

ainsi que nous le verrons bientôt, l'accroissement de longueur Δl du fil est infiniment petit par rapport au déplacement u.

On peut donc écrire :

$$P\frac{du}{ds} = P\frac{du}{dz}.$$

En M′, cette projection deviendra

$$P\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right).$$

L'élément MM′ peut donc être considéré comme libre si on le suppose soumis aux forces

$$-P\frac{du}{dz} \qquad \text{et} \qquad P\left(\frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}dz\right),$$

appliquées respectivement en M et M′, de sorte que l'action totale à laquelle il est soumis est

$$P\frac{d^2u}{dz^2}dz \qquad \text{ou} \qquad P\frac{d^2u}{dz^2}ds,$$

d'après la remarque déjà faite.

Pour avoir l'équation reliant u à z, écrivons que la force appliquée à l'élément est égale au produit de la masse de cet élément par l'accélération du mouvement produit.

Il vient, σ désignant la masse spécifique linéaire du fil,

$$\sigma\, ds\frac{d^2u}{dt^2} = P\frac{d^2u}{dz^2}ds;$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{43}$$

C'est là l'équation des cordes vibrantes : elle joue en Physique un rôle tout à fait fondamental.

Digitized by Google

C'est parce que la force motrice est distribuée suivant une certaine loi le long de la corde, qu'au lieu d'avoir, comme dans le cas précédent, une équation différentielle simple, nous arrivons à une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Exercice. — Vérifier que le déplacement u du point de la corde d'abscisse z peut avoir pour loi

$$u = a \sin(bt + cz),$$

b et c satisfaisant à une condition que l'on explicitera et discutera : périodicité en t et en z; superposition des deux solutions obtenues; facteur de multiplication de la fréquence rapportée au pendule de longueur l.

Remarque. — La variation de longueur Δl du fil est infiniment petite par rapport à u. En posant $om = l'$ on a (*fig.* 13)

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{u}{l}, \qquad l' = \frac{l}{\cos\alpha},$$

et par suite

$$l' - l = \frac{l(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Ainsi

$$\Delta l = \frac{l\alpha^2}{2} = \frac{u^2}{2l},$$

d'où

$$\frac{\Delta l}{u} = \frac{u}{2l},$$

ce qui montre que $\frac{\Delta l}{u}$ tend vers zéro lorsque u tend vers zéro, Δl est donc un infiniment petit d'ordre supérieur à u.

La force qui sollicite l'élément MM′ parallèlement à OZ

Digitized by Google

est infiniment petite par rapport à celle qui le sollicite suivant OU.

Pour obtenir des fréquences élevées, il faut éveiller des forces d'intensité considérable agissant sur des masses relativement faibles ; on y parvient par tension comme on vient de le voir à propos de la corde vibrante ou en mettant en jeu des forces élastiques : par flexion, par traction, par pression, etc. Cette question sera développée plus loin.

Phénomènes sonores. — Le *Son* est la propriété par laquelle des vibrations d'une fréquence convenable se révèlent à nous. C'est la sensation déterminée dans l'organe de l'ouïe, par les vibrations qui viennent agir sur le tympan. Mais il faut, pour qu'il y ait réception sonore, que la fréquence du mouvement vibratoire soit comprise entre deux limites N_i, N_s variables avec les individus (de 16 à 40000 et même à 50000).

Expérience. — Faisons vibrer une tige encastrée dans un étau. Si les vibrations sont de l'ordre de dix par seconde, on ne peut plus les distinguer les unes des autres par suite du phénomène de la persistance des impressions rétiniennes. Augmentons la masse à mouvoir en fixant un corps à l'extrémité de la tige; le mouvement devient d'autant plus lent que la masse supplémentaire est plus grande et l'on voit la tige prendre ses diverses positions successives.

En utilisant des lames de plus en plus courtes, le nombre des vibrations augmente et bientôt on entend un son.

On a pu réaliser des corps vibrants dont la fréquence dépasse de beaucoup ce que l'oreille peut percevoir.

Des fréquences très élevées ont été obtenues avec des diapasons : Kœnig en a construit allant jusqu'à $N = 90000^{vd}$.

Digitized by Google

Avec le sifflet de Galton, petit tuyau fermé dont on peut diminuer beaucoup la longueur, on parvient à $N = 170000$.

Enfin Altberg a obtenu des vibrations dont la fréquence a atteint $N = 340000$, en utilisant l'étincelle de décharge d'un condensateur.

Revision des notions qui font partie du programme des lycées : Intervalles, Accords, Gammes, etc.

MOUVEMENT SINUSOÏDAL AMORTI.

Loi du mouvement. — Le mouvement sinusoïdal amorti, qui intervient dans la théorie de tant d'appareils variés, est défini par la relation

$$(9) \qquad u = ae^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

dans laquelle e est la base des logarithmes népériens et λ un paramètre positif; ω et a sont des constantes spécifiques du mouvement considéré.

La vitesse v et l'accélération γ de ce mouvement supposé *rectiligne* ont pour expressions

$$(10) \qquad v = \frac{du}{dt} = ae^{-\lambda t}(\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t),$$

$$(11) \qquad \gamma = \frac{d^2 u}{dt^2} = ae^{-\lambda t}[(\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\lambda\omega \cos \omega t].$$

Un tel mouvement *n'est pas périodique.*

Le terme en $\sin \omega t$ reprend bien les mêmes valeurs aux époques

$$(4) \qquad t + T, \quad t + 2T, \quad \ldots, \quad t + nT \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

mais cette propriété ne s'étend pas au terme en $e^{-\lambda t}$ puisque

Digitized by Google

t croissant constamment $e^{-\lambda t}$ décroît constamment et tend vers zéro.

Toutefois, comme la durée définie par (4) joue un rôle important, nous l'appellerons la *pseudo-période* du mouvement; ω est encore ici une vitesse angulaire.

On verra plus loin la signification de a.

Diagramme du mouvement. — Reprenons les notations de la page 3. Cherchons d'abord les points situés sur l'axe Ot, pour lesquels $u = 0$. Pour ces points

$$\omega t = K\pi \qquad (K \text{ entier});$$

d'où

$$t = K\frac{\pi}{\omega} = K\frac{T}{2}.$$

En donnant à K les valeurs successives 0, 1, 2, ..., nous obtenons les points O, C, G, ... (*fig.* 16). Ainsi entre deux passages du mobile par la position d'équilibre, le sens du mouvement étant le même, il s'écoule le temps T, c'est-à-dire la durée de la pseudo-période.

Les *maxima* et les *minina* de u ont lieu pour $\frac{du}{dt} = 0$, c'est-à-dire lorsque la vitesse v est nulle. Donc les époques t auxquelles se produisent les élongations successives extrêmes sont telles que (10)

$$\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t = 0,$$

$$\operatorname{tang} \omega t = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Si ψ est le plus petit angle répondant à la relation

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\omega}{\lambda}, \tag{12}$$

on aura

$$\omega t = \psi + K\pi$$

Digitized by Google

ou

(13) $$t = \frac{\psi}{\omega} + K\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}\left(\frac{\psi}{\pi} + K\right).$$

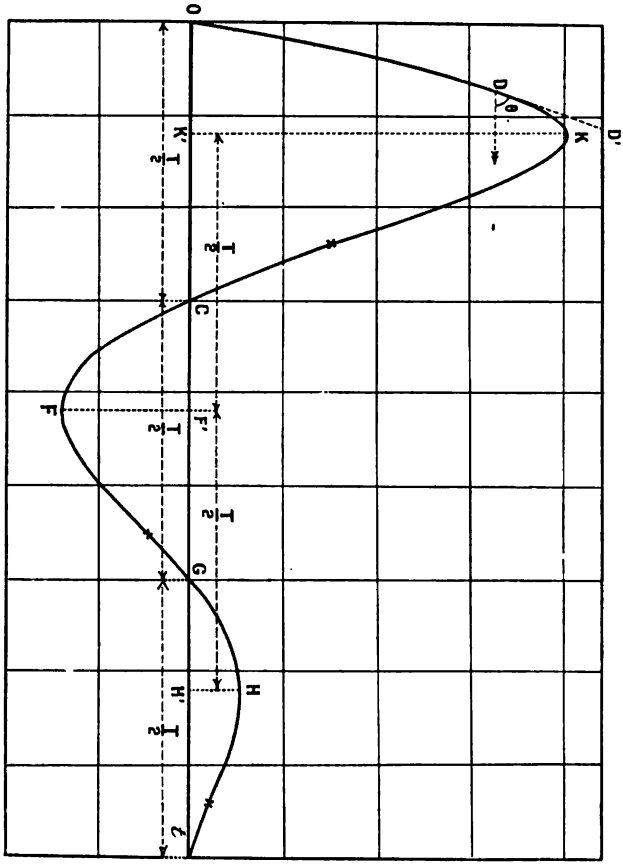


Fig. 16.

Deux élongations successives maxima, à droite, se produisent, pour les valeurs paires de K, par exemple; l'une d'elles ayant lieu au temps t_1

$$t_1 = \frac{\psi}{\omega} + K\frac{\pi}{\omega},$$

Digitized by Google

la suivante se produira à l'époque t'_1

$$t'_1 = \frac{\psi}{\omega} + (K+2)\frac{\pi}{\omega},$$

telle que

$$t'_1 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = T.$$

De même, l'intervalle de temps, qui s'écoulera entre deux arrêts successifs à gauche, sera encore T. Il y a en cela une certaine analogie avec le mouvement sinusoïdal non amorti.

Voici une différence fondamentale : la première élongation maximum à droite a lieu à l'époque

$$\tau = \frac{T}{2}\frac{\psi}{\pi}.$$

Cette époque correspond au point représentatif K' qui n'est *plus le milieu* de OC. Il faudrait en effet, pour que $\tau = \frac{T}{4}$, que $\psi = \frac{\pi}{2}$, mais alors $\tang\psi$ serait infini (12), ce qui est impossible. En effet cela exigerait soit $\lambda = 0$ et le mouvement ne serait plus amorti, soit ω infini, ce qui ne correspond à aucune réalité physique. Donc on a $\psi < \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\tau < \frac{T}{4}$.

Loi des élongations successives. — D'après ce que nous venons de voir [équation (13)] les élongations maxima ont lieu aux époques

$$t = \frac{\psi}{\omega} + K\frac{\pi}{\omega}.$$

L'élongation initiale maximum à droite A_0 ($K = 0$) et la $n^{\text{ième}}$ élongation maximum à droite A_{2n} ($K = 2n$) auront

Digitized by Google

donc pour valeurs

$$A_0 = a e^{-\frac{\lambda\psi}{\omega}} \sin\psi$$

et

$$A_{2n} = a e^{-\lambda\left(\frac{\psi}{\omega} + 2n\frac{\pi}{\omega}\right)} \sin\psi = a e^{-\frac{\lambda\psi}{\omega}} \sin\psi e^{-\frac{\lambda 2n\pi}{\omega}},$$

$$(14) \qquad A_{2n} = A_0 e^{-\lambda 2n \frac{T}{2}}.$$

On serait de même conduit à écrire, pour la première et la $n^{\text{ième}}$ élongations à gauche, A_1, A_{2n+1} :

$$A_1 = -a e^{-\lambda\left(\frac{\psi}{\omega} + \frac{\pi}{\omega}\right)} \sin\psi = -A_0 e^{-\lambda\frac{\pi}{\omega}} = -A_0 e^{-\lambda\frac{T}{2}}$$

et

$$(15) \qquad A_{2n+1} = -A_0 e^{-\lambda(2n+1)\frac{T}{2}}.$$

On passe donc d'une élongation maximum à droite à l'élongation consécutive maximum à gauche en multipliant la première par

$$-e^{-\lambda\frac{T}{2}}.$$

Si l'on considère seulement les élongations maxima soit de droite soit de gauche, elles forment une progression géométrique décroissante de raison $e^{-\lambda T}$. Borda avait observé cette loi sur le pendule.

Rappelons (*fig.* 16) qu'il faut moins de temps au mobile pour aller de O au maximum K que pour aller du maximum K au point C qui correspond à sa position d'équilibre.

Décrément. — Le facteur $e^{-\lambda T}$ qui marque la réduction de l'amplitude à chaque oscillation est appelé le *décrément* du mouvement considéré. Si l'on compare la première élon-

Digitized by Google

gation extrême à droite à la $n^{\text{ième}}$ dans le même sens, on a

$$\frac{A_{2n}}{A_0} = e^{-n\lambda T};$$

d'où

$$(16) \qquad \lambda T = \frac{1}{n} \log \frac{A_0}{A_{2n}} = \delta.$$

La quantité $\delta = \lambda T$ s'appelle le *décrément logarithmique* et λ le *facteur d'amortissement* du mouvement.

Détermination expérimentale des constantes d'un mouvement sinusoïdal amorti. — Mesurons avec un chronomètre le temps t qui s'écoule pendant que le mobile se rend n fois à l'extrémité de sa course, à droite par exemple. Si l'on a compté zéro au départ initial de droite on aura

$$t = nT,$$

d'où la durée T de la pseudo-période, si l'on a estimé n. Connaissant T et n la relation (16) donne δ, et aussi λ à la condition de relever de plus les amplitudes A_0 et A_{2n}.

Pour cela on munit le système oscillant d'un miroir et on lit sur une échelle graduée les deux positions du spot lumineux qui correspondent au début et à la fin de l'expérience. Comme les amplitudes A_0 et A_{2n} interviennent seulement par leur rapport, il est inutile de connaître l'amplification de la lecture.

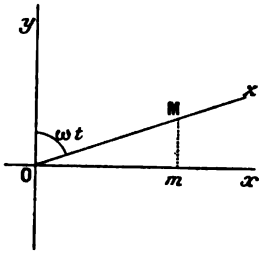
Représentation de la vitesse. — Ici encore, la tangente DD′ (*fig.* 16) est telle que

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{du}{dt} = v.$$

Digitized by Google

Intervention du mouvement circulaire uniforme dans la représentation des éléments du mouvement sinusoïdal amorti. — Considérons deux axes rectangulaires OX et OY et un point M mobile sur une droite Oz tournant autour de O avec la vitesse angulaire ω. Cherchons le lieu que doit

Fig. 17.



décrire le point M pour que son abscisse m soit constamment égale à u (*fig.* 17).

Soit

$$\widehat{YOZ} = \theta = \omega t,$$

on a

$$Om = OM \sin \omega t;$$

m sera donc animé d'un mouvement sinusoïdal amorti si

$$OM = \rho = a e^{-\lambda t},$$

et le lieu de M, en coordonnées polaires, s'obtiendra en éliminant t entre les deux équations donnant la valeur de ρ et de θ, on a ainsi

$$\rho = a e^{-\frac{\lambda \theta}{\omega}}.$$

Ce lieu est donc une spirale logarithmique.

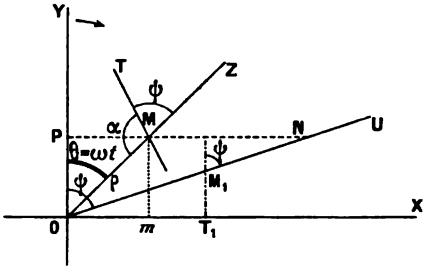
La tangente à la courbe en M fait avec OM (*fig.* 18) un

Digitized by Google

angle α tel que

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}} = -\frac{\omega}{\lambda} = -\operatorname{tang}\psi \qquad (12),$$

Fig. 18.



et par conséquent les différentes spires coupent le rayon vecteur OZ sous un angle constant.

Les élongations extrêmes de m sont telles que

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\psi.$$

On obtient donc les élongations extrêmes en projetant sur OX les points de rencontre de la spirale avec la droite OU qui fait avec OY un angle égal à ψ. En ces points les tangentes à la courbe sont perpendiculaires à OX.

Soit maintenant à représenter la vitesse

$$v = \frac{du}{dt} = a\,e^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t),$$

ou

$$\frac{du}{dt} = \lambda a\,e^{-\lambda t}\cos\omega t(\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\omega t)$$
$$= \lambda\rho\cos\omega t(\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\omega t).$$

Si P est la projection de M sur OY on a

$$\frac{du}{dt} = \lambda\overline{OP}(\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\omega t) = \lambda(PN - PM) = \lambda\overline{MN},$$

Digitized by Google

MN représente donc au facteur constant près $\frac{1}{\lambda}$ la vitesse du mobile m et la vitesse est dirigée de M vers N.

L'accélération γ qui a pour expression

$$\gamma = \frac{d^2 u}{dt^2} = a\, e^{-\lambda t}[(\lambda^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2\lambda\omega\cos\omega t]$$

peut s'écrire :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = (\lambda^2 - \omega^2)\, a\, e^{-\lambda t}\cos\omega t(\operatorname{tang}\omega t - \operatorname{tang} 2\psi).$$

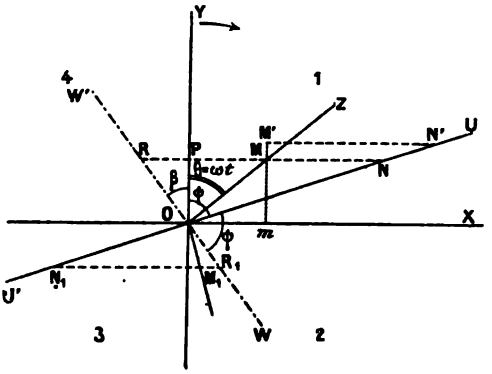
car

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\omega}{\lambda},$$

et par suite

$$\operatorname{tang} 2\psi = \frac{2\lambda\omega}{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Fig. 19.



Traçons OW faisant avec OY l'angle 2ψ (*fig.* 19), son prolongement OW′ est tel que

$$\operatorname{tang}\beta = -\operatorname{tang} 2\psi;$$

Digitized by Google

d'où il résulte que

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (\lambda^2 - \omega^2)\rho \cos\omega t(\operatorname{tang}\omega t + \operatorname{tang}\beta)$$
$$= (\lambda^2 - \omega^2)(\mathrm{PM} + \mathrm{PR}) = (\lambda^2 - \omega^2)\overline{\mathrm{MR}},$$

MR représente donc à un facteur constant près $\frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}$ l'accélération de m, accélération dirigée de M vers R.

Écrire que $\gamma = 0$ c'est écrire que v passe en valeur absolue par un maximum, ce maximum a donc lieu quand

$$\mathrm{MR} = 0,$$

c'est-à-dire quand OM se trouve sur WW′ ou quand

$$\omega t = 2\psi + \mathrm{K}\pi;$$

or le mobile passe à l'origine aux époques telles que

$$\omega t = \mathrm{K}\pi,$$

et arrive aux positions extrêmes pour

$$\omega t = \psi + \mathrm{K}\pi;$$

on voit, par différences, que la vitesse est maximum après un temps double de celui qui s'écoule entre les passages à l'origine et à l'élongation maximum [*voir* Points d'inflexion (*fig.* 16)].

Aux points de rencontre de la spirale avec WW′ les tangentes sont parallèles à OU.

On voit de plus que, dans le cas de la figure, une brusque variation de vitesse transporte le segment MN parallèlement à lui-même en M′N′, ce qui augmente l'amplitude et diminue la phase.

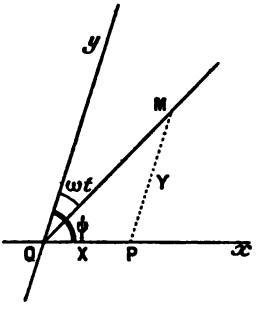
Autre représentation. — Soit toujours à représenter le mouvement

$$u = a e^{-\lambda t} \sin\omega t;$$

Digitized by Google

traçons deux axes OX et OY faisant entre eux l'angle ψ (12) et soit OZ une droite tournant autour de O avec la vitesse angulaire ω (*fig.* 20). Par le point M de OZ menons

Fig. 20.



des parallèles aux axes, d'où les segments X et Y. Dans le triangle OMP, on a

$$\frac{OM}{\sin\psi} = \frac{X}{\sin\omega t} = \frac{Y}{\sin(\psi - \omega t)},$$

et si nous prenons

$$OM = a\,e^{-\lambda t}\sin\psi,$$

il vient

$$X = u.$$

Mais

$$v = \frac{du}{dt} = a\,e^{-\lambda t}(\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t),$$

$$v = \lambda a\,e^{-\lambda t}(\operatorname{tang}\psi\cos\omega t - \sin\omega t),$$

$$v = \frac{\lambda a\,e^{-\lambda t}}{\cos\psi}\sin(\psi - \omega t);$$

or

$$Y = a\,e^{-\lambda t}\sin(\psi - \omega t),$$

donc Y représente au facteur constant près $\frac{\lambda}{\cos\psi}$ la vitesse du mobile.

Digitized by Google

Exercices. — I. *Calculer les élongations u_m relatives au maximum de la vitesse dans le mouvement*

$$u = a\,e^{-\lambda t}\sin\varpi\,t,$$

ainsi que la valeur v_m de la vitesse en ces points.

La vitesse est maximum pour les valeurs de t qui annulent $\frac{d^2u}{dt^2}$, c'est-à-dire pour

$$t = \frac{2\psi}{\omega} + \frac{K\pi}{\omega};$$

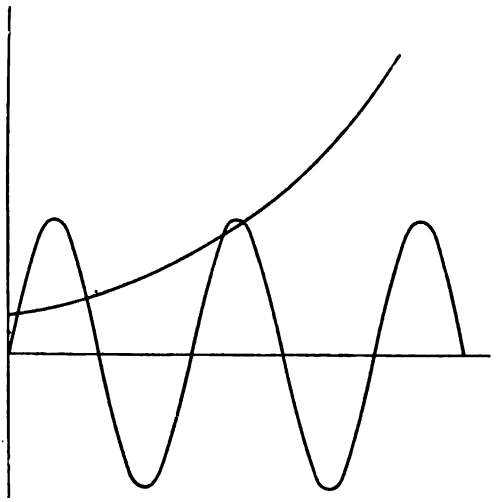
on en déduit

$$u_m = a\,e^{-\lambda\left(\frac{2\psi}{\omega}+\frac{K\pi}{\omega}\right)}\sin(2\psi + K\pi)$$

et

$$v_m = a\,e^{-\lambda\left(\frac{2\psi}{\omega}+\frac{K\pi}{\omega}\right)}[\omega\cos(2\psi + K\pi) - \lambda\sin(2\psi + K\pi)].$$

Fig. 21.



II. *Un mobile m est animé d'un mouvement représenté par l'équation*

$$u = a\,e^{-\lambda t}\sin\omega\,t.$$

Digitized by Google

Trouver les époques auxquelles le mobile repasse par un même point de sa trajectoire.

Soit u_1 l'abscisse considérée du point m. Nous avons à résoudre l'équation

$$u_1 = a\, e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

ou

$$\frac{u_1}{a} e^{\lambda t} = \sin \omega t.$$

Les valeurs cherchées sont les abscisses des points d'intersection des courbes (*fig.* 21)

$$y = \frac{u_1}{a} e^{\lambda t}$$

et

$$y = \sin \omega t.$$

Nous n'aurons un système périodique que pour $u_1 = 0$.

Relation entre l'élongation, la vitesse et l'accélération. — Reprenons les relations (9), (10), (11); on en déduit, en éliminant $e^{-\lambda t}$, $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$

$$(17) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + (\lambda^2 + \omega^2) u = 0.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement sinusoïdal amorti, équation du deuxième ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique a ses racines imaginaires.

Réciproquement, étant donné un mouvement sinusoïdal amorti, on pourra déterminer ses constantes par identification avec l'équation différentielle précédente.

L'équation (17) peut s'écrire

$$\mu \frac{d^2 u}{dt^2} = -2\mu\lambda \frac{du}{dt} - \mu(\omega^2 + \lambda^2) u.$$

Digitized by Google

Sur cette forme, on voit que les forces agissant sur le mobile peuvent être ramenées à deux, la première

$$f_1 = -\mu(\omega^2 + \lambda^2)u, \tag{18}$$

proportionnelle à l'élongation u dirigée vers l'origine O, *force statique* car elle existerait si le mobile n'était pas en mouvement, mais seulement déplacé de u par rapport à sa position d'équilibre, la seconde

$$f_2 = -2\mu\lambda\frac{du}{dt}, \tag{19}$$

proportionnelle à la vitesse et de sens opposé à cette vitesse et par suite au mouvement, nous l'appellerons *force amortissante.*

Dans le cas du mouvement circulaire, les forces f_1 et f_2 sont remplacées par des moments.

Expériences. — 1° Un ressort R fixé en un point O supporte un aimant A dont l'un des pôles pénètre dans une bobine BB (*fig.* 22). Si on lance un courant instantané dans la bobine, l'aimant se met à osciller ; on fait passer, à des intervalles de temps convenablement choisis, un courant instantané, de manière à produire une variation de vitesse de même sens que la vitesse de l'aimant à l'instant considéré. Comme nous l'avons vu (*fig.* 19), l'amplitude augmente.

On abandonne le système à lui-même ; la bobine étant ouverte, on mesure le coefficient d'amortissement λ_1, puis on ferme la bobine sur une résistance variable x, on mesure les coefficients d'amortissement correspondants λ_2, λ_3, ..., et l'on construit la courbe (x, λ).

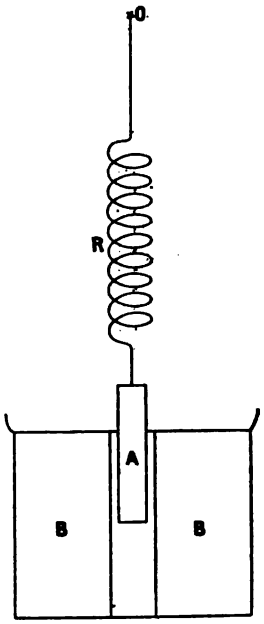
2° L'organe mobile est un équipage de galvanomètre à cadre. Le circuit étant ouvert, on fait osciller le cadre,

Digitized by Google

l'amortissement est très faible et le mouvement est sensiblement sinusoïdal.

On ferme le circuit sur une résistance, le mouvement est alors sinusoïdal amorti. Si la résistance diminue d'une

Fig. 22.



manière continue, elle arrive à prendre une valeur appelée *résistance critique* à partir de laquelle le cadre, déplacé de sa position d'équilibre, y revient sans la dépasser; le mouvement devient exponentiel et, pour des résistances de plus en plus faibles, le système met de plus en plus de temps à revenir à sa position d'équilibre. Ces circonstances s'expliquent par les propriétés générales de l'équation différentielle qui régit le mouvement et que nous allons rapidement établir.

Digitized by Google

LES DIFFÉRENTS ASPECTS DU MOUVEMENT DES APPAREILS AMORTIS EXPLIQUÉS PAR LES PROPRIÉTÉS DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME ORDRE.

Soit l'équation

$$(20) \qquad K_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + K_2 \frac{du}{dt} + K_3 u = 0$$

ou K_1, K_2, K_3 sont des constantes ($K_1 \neq 0$). Divisons par K_1, l'équation devient

$$(21) \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} + 2b \frac{du}{dt} + c^2 u = 0,$$

en posant

$$\frac{K_2}{K_1} = 2b \qquad \text{et} \qquad \frac{K_3}{K_1} = c^2,$$

car, dans les appareils de physique (balance, pendule, galvanomètre, électromètre, etc.), le coefficient c^2 de u est toujours positif.

L'équation (21) admet, comme solution générale, une expression de la forme

$$A e^{\rho_1 t} + B e^{\rho_2 t},$$

ρ_1 et ρ_2 étant les racines de l'équation dite équation *caractéristique*

$$(22) \qquad \rho^2 + 2b\rho + c^2 = 0.$$

et A, B deux constantes arbitraires.

Cette équation a deux racines imaginaires ou réelles selon que l'on a $b^2 - c^2 < 0$, ou $b^2 - c^2 > 0$, avec le cas de transition $b^2 - c^2 = 0$ où les deux racines sont égales.

Digitized by Google

Premier cas : $b^2 - c^2 < 0$.

On a

$$\rho = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2},$$

ou en posant

$$b^2 - c^2 = -\beta^2,$$
$$\rho = -b \pm \beta i.$$

Alors la solution générale de (21) est

$$(23) \quad u = e^{-bt}(\mathrm{A}e^{i\beta t} + \mathrm{B}e^{-i\beta t}) = e^{-bt}(\mathrm{M}\cos\beta t + \mathrm{N}\sin\beta t),$$

puisque, d'après l'identité d'Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Deuxième cas : $b^2 - c^2 > 0$.

La solution générale de (21) est alors d'une tout autre nature physique ; elle devient exponentielle car u est donné par l'expression

$$(24) \qquad u = e^{-bt}\left(\mathrm{M}e^{\sqrt{b^2-c^2}\,t} + \mathrm{N}e^{-\sqrt{b^2-c^2}\,t}\right).$$

Si donc t augmente, u diminue constamment, $b > 0$, et le mobile écarté de sa position d'équilibre y revient sans la dépasser. Le mouvement du mobile est devenu *apériodique;* il n'y a plus de pseudo-période : théoriquement le système met un temps infini à revenir à sa position d'équilibre.

Troisième cas : $b^2 - c^2 = 0$.

Pour obtenir la forme générale de la solution, nous allons employer la méthode de d'Alembert.

Lorsqu'on a $\rho_1 \neq \rho_2$

$$\frac{e^{\rho_1 t} - e^{\rho_2 t}}{\rho_1 - \rho_2}$$

Digitized by Google

est solution de (21). Si ρ_2 tend vers ρ_1, cette expression tend vers

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(e^{\rho t})_{\rho=\rho_1} = t\, e^{\rho_1 t}.$$

Donc pour $b^2 - c^2 = 0$ la solution générale de (21) est

$$u = e^{\rho_1 t}(At + B). \tag{25}$$

Les trois cas précédents peuvent se présenter dans un même appareil, car on peut faire varier les coefficients de l'équation (21) en modifiant dans l'appareil la force amortissante, la force directrice, etc.

Lorsqu'on réalise le cas $b = c$ on dit qu'on règle l'appareil pour *l'état critique.*

CALCUL DE LA FORCE AMORTISSANTE DANS LES AMORTISSEURS USUELS.

1° **Oscillations des colonnes liquides.** — Étudions l'oscillation d'un liquide dans un manomètre. Soit un tube en U, cylindrique, de section droite s, renfermant un liquide dont les deux niveaux sont dans le plan horizontal OO′ (*fig.* 23). Provoquons du côté de O une dénivellation u vers le bas, le niveau monte en O′ de la hauteur u. La force motrice est évidemment le poids de la colonne HH′ de hauteur $2u$. Si ρ est la masse spécifique du liquide et g l'accélération de la pesanteur, cette force motrice a pour expression

$$f_1 = s \times 2u \times \rho g.$$

Si nous supposons le frottement négligeable, l'équation du mouvement est

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -s\rho g \times 2u, \tag{26}$$

Digitized by Google

m étant la masse totale du liquide. Si celui-ci occupe dans le tube une longueur l, on a

$$m = ls\rho,$$

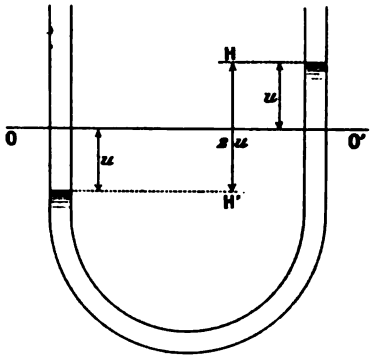
et l'équation (26) devient

$$ls\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = -2s\rho g u$$

ou

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{2g}{l} u. \tag{27}$$

Fig. 23.



C'est l'équation d'un mouvement sinusoïdal non amorti et le système oscille comme un pendule de longueur $\frac{l}{2}$.

Pour avoir la période identifions avec l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u,$$

on tire de là, en se rappelant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (4),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l}{2}}{g}}. \tag{28}$$

Digitized by Google

Ainsi la durée de la période est indépendante de la section s du tube et de la nature du liquide puisque la masse spécifique ρ n'intervient pas, tout se passe comme dans le pendule où la substance n'intervient pas.

Expérience. — Faisons osciller une colonne de mercure d'une longueur donnée l, par exemple; le système oscille suivant un certain rythme T. Recommençons l'expérience avec une colonne d'eau de même longueur l; le rythme reste le même.

Si l'on fait l'expérience avec une colonne de mercure plus longue, T augmente conformément à la formule (28). Mais l'expérience montre que si T varie peu, quand la nature du liquide change, l'amplitude est loin de rester constante. Il est intéressant de constater que la durée T est peu influencée par la force amortissante même lorsque celle-ci varie très notablement, c'est pourquoi la formule (28) qui correspond à un mouvement non amorti a, au point de vue physique, une certaine réalité.

En introduisant une force amortissante telle que $f_2 = K_2 \frac{du}{dt}$ (K_2 fonction des dimensions du tube et de la nature du liquide), nous serions ramenés à une équation de la forme (21) et, suivant le rapport qui existe entre K_1 et K_2, on aura affaire au mouvement sinusoïdal amorti ou bien au mouvement apériodique.

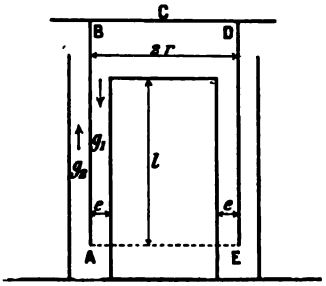
En cherchant à faire osciller du mercure dans un tube de plus en plus étroit, on arrive au mouvement apériodique.

2° **Amortisseur à air.** — Le type le plus parfait des amortisseurs à air est celui dont P. Curie a muni sa balance. L'amortisseur généralement employé est formé d'une seule cloche cylindrique ABCDE (*fig.* 24) plongeant dans une

Digitized by Google

gouttière cylindrique. Lorsque le plateau C de la balance s'abaisse, l'air est obligé, pour s'échapper, de descendre le long de g_1 et de remonter le long de g_2. Dans ce mouvement, les différentes couches d'air frottent les unes sur les

Fig. 24.



autres ; les tranches contiguës aux parois ont une vitesse nulle, les tranches centrales une vitesse maximum. De plus, du fait que le plateau C est animé d'une certaine vitesse v vers le bas, il résulte que l'air de la cloche est à la pression $p = p_0 + \Delta p$ supérieure à la pression atmosphérique p_0.

Supposons le régime permanent, à vitesse uniforme, établi et soit S la section de la cloche. Alors la force qui agit sur C, et qui est dirigée de haut en bas si C descend, a pour valeur

$$f = S\,\Delta p.$$

puisqu'elle équilibre la pression de direction opposée due au gaz.

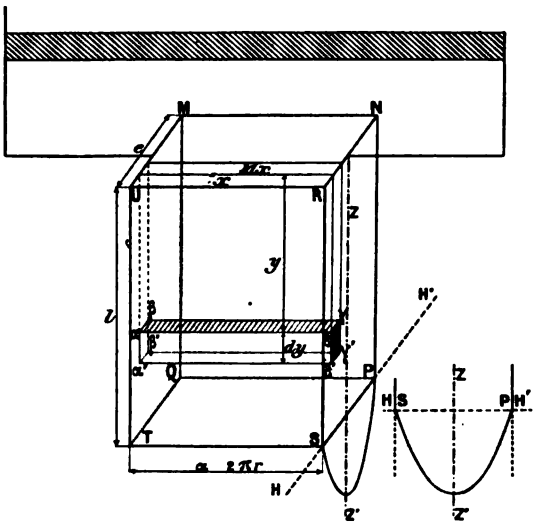
Exercice. — *Calcul de* Δp. — Supposons, pour simplifier le calcul de Δp : 1° qu'il y a une seule gouttière et que la cloche est remplacée par un piston qui se déplace à l'intérieur d'une boîte verticale de section égale à celle de la cloche; 2° que le gaz ne peut s'échapper par le bas qu'en

Digitized by Google

passant dans un tube vertical parallélépipédique d'épaisseur e égale à celle de la gouttière, de hauteur l et de largeur $a = 2\pi r$, r étant le rayon de la cloche. Ce tube n'est que le développement de la gouttière.

Calculons la force résultant de la chute de pression, en exprimant l'état permanent d'une tranche infiniment mince d'épaisseur dx, de longueur dy et de largeur a située à une distance x du plan de front MNPQ et à la distance y du plan horizontal MNRU (*fig.* 25).

Fig. 25.



La chute totale physique de pression, le long de la tranche de hauteur l, est Δp, et si nous supposons les oscillations suffisamment lentes pour qu'à chaque instant le régime permanent soit établi, la variation par unité de longueur est nécessairement

$$-\frac{\Delta p}{l},$$

Digitized by Google

puisque la pression diminue lorsque y croît. Sur une longueur dy, la variation sera

$$dp = -\frac{\Delta p}{l}\,dy.$$

La résultante des forces dues aux pressions agissant sur les faces horizontales $\alpha\beta\gamma\delta$ et $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, d'aire adx, a pour valeur

$$a\,dx\,\frac{\Delta p}{l}\,dy.$$

Calculons la force amortissante due au frottement qui résulte des différences de vitesse entre les diverses couches d'air contiguës. La force amortissante agissant sur la face intérieure de front $\alpha\delta\alpha'\delta'$ de la tranche est proportionnelle à l'aire $a\,dy$ de cette face et à la variation $\frac{dv}{dx}$ de vitesse par unité de longueur pour le plan x; de plus elle est dirigée en sens inverse du mouvement puisque cette tranche va plus vite que celle qui se trouve en avant. Sa valeur est

$$-\eta a\,dy\,\frac{dv}{dx},$$

η désignant le coefficient de frottement intérieur du gaz ($\eta = 0,00019$ unité C. G. S. pour l'air).

La force agissant sur la face postérieure $\beta\beta'\gamma\gamma'$ est

$$\eta a\,dy\left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2}\,dx\right);$$

elle est dirigée vers le bas puisque la face considérée est entraînée par la tranche voisine située en arrière qui va plus vite.

La résultante df_2 est

$$df_2 = \eta a\,dy\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx.$$

Digitized by Google

Dire que le régime permanent est atteint, c'est dire que v est constant. Par conséquent, les forces appliquées à chaque élément se font équilibre et l'on a

$$-a\,dy\,dx\,\frac{\Delta p}{l} = \eta a\,dx\,dy\,\frac{d^2 v}{dx^2};$$

d'où l'équation très simple

$$\frac{\Delta p}{\eta l} = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \tag{29}$$

qui donne par intégration

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\Delta p}{\eta l}x + \mathrm{K}$$

et

$$v = -\frac{\Delta p}{\eta l}\frac{x^2}{2} + \mathrm{K}x + \mathrm{K}'.$$

Comme, par hypothèse, la couche située contre la paroi a une vitesse nulle

$$v = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = 0,$$

il en résulte

$$\mathrm{K}' = 0.$$

Pour déterminer K, écrivons, de même, que pour

$$x = e, \qquad v = 0,$$

il vient

$$0 = \mathrm{K}e - \frac{\Delta p}{\eta l}\frac{e^2}{2},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K} = \frac{\Delta p}{\eta l}\frac{e}{2}$$

et v a pour expression

$$v = -\frac{\Delta p}{\eta l}\frac{x^2}{2} + \frac{\Delta p}{\eta l}\frac{e}{2}x. \tag{30}$$

Digitized by Google

Si donc on porte, à partir d'un certain plan de section droite HH′ (*fig.* 25), des ordonnées proportionnelles aux vitesses, on obtiendra une parabole répondant à l'équation (30).

Cette parabole a pour axe de symétrie la verticale zz' et le coefficient angulaire de la tangente à l'origine S a pour valeur

$$\frac{\Delta p}{\eta l}\,\frac{e}{2}.$$

Débit. — Le débit, c'est-à-dire la quantité d'air qui passe pendant l'unité de temps à travers chaque section droite, est alors représenté par le volume du cylindre dont les génératrices sont parallèles aux bords inférieurs du parallélépipède, dont la directrice est la parabole précédente et qui est limité au plan HH′.

Calculons ce débit. Pour une tranche infiniment mince, de vitesse v, située à la distance x de la paroi, le débit pendant le temps dt est

$$-d^2\mathrm{V} = v\,dt \times a\,dx,$$

et pour l'ensemble de toutes les tranches

$$-d\mathrm{V} = dt \times a\int_0^e v\,dx = dt \times \frac{a\,\Delta p}{2\eta l}\int_0^e (-x^2 + ex)\,dx,$$

d'où

$$-\frac{d\mathrm{V}}{dt} = a\frac{\Delta p}{\eta l}\,\frac{e^3}{12},$$

le signe — indiquant que le volume de la cloche diminue, le sens du mouvement ayant lieu du haut vers le bas.

Puisque nous sommes en régime permanent, la surpression Δp est constante et si v' est la vitesse du piston,

Digitized by Google

comme S est sa section, le volume d'air qu'il chasse pendant le temps dt a pour expression

$$-dV = S v' dt,$$

et par conséquent

$$S v' dt = dt \times a \frac{\Delta p}{\eta l} \frac{e^3}{12}.$$

On déduit de cette équation la surpression Δp

$$\Delta p = \frac{S \eta l}{a e^3} 12 v'.$$

Force amortissante. — Mais si u désigne le déplacement du piston, sa vitesse $v' = \frac{du}{dt}$, alors

$$f_2 = -S \Delta p = -\frac{S^2 \eta l}{a e^3} \times 12 \frac{du}{dt};$$

S figure ici par son carré, car le piston intervient pour produire la surpression et pour la supporter.

Nous voyons de plus l'importance énorme de e, car cette distance intervient par son cube.

P. Curie a vérifié, et pour des amortisseurs variés, qu'il y a concordance entre les résultats calculés et les résultats d'expérience, les écarts entre les nombres obtenus s'expliquant par le fait que e est mal connu et intervient par son cube.

A un autre point de vue ce dispositif permet d'étudier la viscosité η des gaz.

Remarque. — Dans les amortisseurs, l'air intérieur se met en équilibre avec l'extérieur dans un temps extrêmement court; si, en effet, le gaz restait sans s'écouler sous

Digitized by Google

la cloche pendant que celle-ci se déplace de $\frac{1}{100}$ de micron, il en résulterait une force antagoniste de $0^g,05$ avec une cloche de 7^{cm} de diamètre et une chambre à air de 1^{cm} de hauteur. On peut donc, *à chaque instant*, supposer que tout se passe comme si la cloche avait une vitesse de régime.

Amortisseurs par induction. — D'autres amortisseurs très employés sont les amortisseurs magnétiques basés sur les propriétés des courants induits. On sait (loi de Lenz) que tout déplacement d'un circuit fermé, ou d'une masse métallique, dans un champ magnétique, donne naissance dans le circuit ou dans la masse à des courants par l'intermédiaire desquels le champ magnétique applique à ces conducteurs des forces qui tendent à s'opposer à la continuation du mouvement : ces forces font toujours frein sur le mouvement.

Expérience. — A l'extrémité d'un fil d'argent de 1^m de long, servant de fil de torsion, se trouve fixée une masse de cuivre, de forme cylindrique, d'environ 630^g. Le fil porte un miroir, et un rayon réfléchi par ce miroir donne une image sur une échelle divisée.

Le système étant mis en mouvement, on constate que la durée de la période est

$$T = 13 \text{ secondes}$$

et que l'amortissement est très faible.

On approche un aimant du cylindre, l'amortissement croît beaucoup, mais la pseudo-période reste encore sensiblement 13 secondes. En augmentant encore l'amortissement, la pseudo-période croît, mais très peu.

On utilise mieux les courants induits, en prenant des

Digitized by Google

blocs de cuivre rouge à l'intérieur desquels se déplace un aimant solidaire de l'équipage dont on veut amortir le mouvement.

Dans le galvanomètre Wiedemann-d'Arsonval, l'aiguille aimantée mobile est placée à l'intérieur d'une cavité creusée au milieu d'une sphère de cuivre rouge. On choisit un métal aussi conducteur que possible, car l'effet du frein est proportionnel à l'intensité du courant et celle-ci est inversement proportionnelle à la résistance.

Quelquefois, au contraire, la masse de cuivre se déplace entre des aimants fixes. Ce dispositif est réalisé dans les compteurs Elihu-Thomson, et dans l'électromètre Curie où l'aiguille se déplace entre des secteurs aimantés.

Explicitons la force amortissante d'induction dans quelques cas.

1. *Trouver le moment d'amortissement relatif à un aimant, suspendu à l'intérieur d'une bobine fermée de résistance* R (*fig.* 26), *et mobile autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la bobine.* — Si i est l'intensité du courant induit qui circule dans la bobine à l'instant t, le champ Φ à l'intérieur de la bobine est alors

$$\Phi = \mathrm{K}i.$$

Sur chaque pôle de masse magnétique m agit donc la force $m\Phi$ et l'aimant incliné sur l'axe de la bobine de l'angle θ est soumis à un couple de moment

$$\mathfrak{M} = 2m\Phi l \sin\theta.$$

Mais

$$2ml = \mathrm{M}$$

est le moment magnétique de l'aimant, quantité déterminée par l'expérience.

Digitized by Google

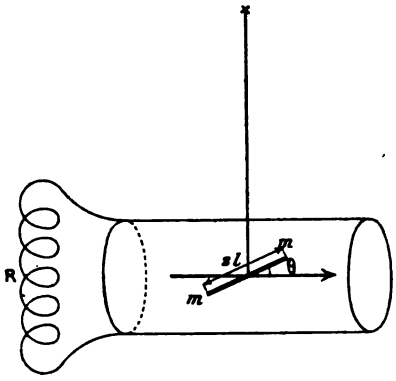
Alors

$$\mathfrak{M} = \mathbf{M}\Phi \sin\theta$$

et le travail effectué dans le déplacement angulaire $d\theta$ est

$$d\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\, d\theta = \mathbf{MK}\, i \sin\theta\, d\theta.$$

Fig. 26.



Ce travail est égal à l'énergie électrique $eidt$, e étant la force électromotrice induite, dépensée dans le circuit pendant le temps dt que dure la rotation $d\theta$.

Donc

$$\mathbf{MK}\, i \sin\theta\, d\theta = ei\, dt,$$

d'où

$$e = \mathbf{MK} \sin\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Si l'on néglige la self-induction du circuit

$$i = \frac{e}{\mathrm{R}} = \frac{\mathbf{MK} \sin\theta}{\mathrm{R}} \frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathbf{M}^2\mathbf{K}^2 \sin^2\theta}{\mathrm{R}} \frac{d\theta}{dt},$$

Digitized by Google

Écrire la loi du mouvement. — En supposant l'aimant suspendu à un fil de torsion, dont C désigne le couple de torsion, l'équation du mouvement est

$$\mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M^2K^2\sin^2\theta}{R}\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0,$$

$\mathfrak{I}$ étant le moment d'inertie de l'équipage mobile par rapport au fil.

Remarque. — Un aimant tourne avec une vitesse angulaire constante ω à l'intérieur d'une bobine longue. D'après la formule précédente, la force électromotrice induite a pour expression

$$e = MK\omega\sin\theta.$$

Son maximum est

$$E = MK\omega = MK2\pi n,$$

n étant le nombre de tours à la seconde.

On peut ainsi comparer *directement* une force électromotrice inconnue à cette force *électromotrice calculable*, en opposant directement sur un électromètre capillaire sensible la force électromotrice E induite et la force électromotrice à évaluer, ou une fraction connue de cette f. é. m. Il est nécessaire, pour atteindre l'équilibre, de faire varier la vitesse angulaire de l'aimant, vitesse que l'on maintient constante une fois l'équilibre établi.

Exercice. — Trouver l'équation du mouvement de l'aimant disposé comme l'indique la figure 22, et étudier ce mouvement.

II. Moment d'amortissement dans le cas du galvanomètre à cadre; équation du mouvement. — Nous allons

Digitized by Google

encore étudier le cas où le galvanomètre à cadre Desprez d'Arsonval est pris comme générateur de courant. Que se passe-t-il lorsqu'on fait osciller le cadre dans le champ de l'aimant?

Pour un point M de masse m situé à la distance r de l'axe (*fig.* 27), la force vive est

$$w = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

et pour l'ensemble des points

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{I} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \tag{31}$$

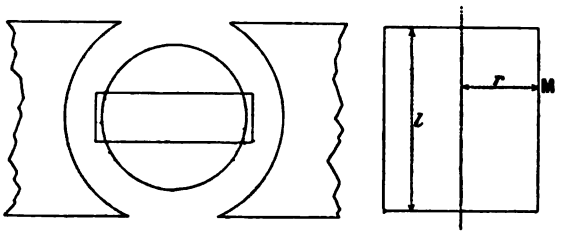
$\mathfrak{I} = \Sigma m r^2$ désignant le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

Pendant le temps dt la variation de force vive est

$$dW = \mathfrak{I} \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Cette variation est produite par le travail des forces agis-

Fig. 27.



santes qui sont ici de deux espèces : la force statique due à la déformation du fil et la force amortissante due au mouvement.

L'ensemble des forces dues à la torsion du fil produit un

Digitized by Google

couple de moment $-C\theta$ auquel correspond, pour une rotation $d\theta$, un travail

$$d\mathfrak{T} = -C\theta\, d\theta.$$

La force amortissante est due à l'action du champ magnétique sur le courant induit dans le cadre pendant son mouvement. Soient i l'intensité du courant à l'instant t et φ le champ magnétique. La force qui agit sur l'élément de courant de longueur l est

$$\varphi i l$$

et son moment par rapport à l'axe de rotation a pour valeur

$$\varphi i l r;$$

en réalité il faut doubler et écrire $2\varphi i l r$ car le système est symétrique par rapport à l'axe (*fig.* 27).

Or $2lr$ est la surface active s d'une spire, s'il y en a n sur le cadre, le moment de la force amortissante est

$$n\varphi i s,$$

et le travail correspondant à la rotation $d\theta$

$$n\varphi i s\, d\theta.$$

Mais i est inconnu : il est ce qu'exigent qu'il soit le mouvement du cadre et l'état du champ magnétique. Calculons i : le flux élémentaire radial balayé par une spire est

$$\varphi s\, d\theta$$

et par le cadre

$$n\varphi s\, d\theta.$$

La force électromotrice est donc

$$-n\varphi s \frac{d\theta}{dt}$$

Digitized by Google

et si R désigne la résistance du cadre

$$i = -\frac{ns\varphi}{R}\frac{d\theta}{dt},$$

la self-induction du cadre étant supposée négligeable.

On a alors, pour expression du travail de la force amortissante,

$$-\frac{n^2 s^2 \varphi^2}{R}\frac{d\theta}{dt}d\theta,$$

d'où l'équation différentielle du mouvement du système

$$(32) \qquad \mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{n^2 s^2 \varphi^2}{R}\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Cette équation n'est pas tout à fait exacte car nous avons supposé, dans le calcul de l'intensité, la self-induction sensiblement nulle. Si la self-induction était notable, il s'introduirait un nouveau terme et nous obtiendrions une équation du troisième ordre [1].

---

[1] *Cas où l'on tient compte de la self-induction.* — L'équation différentielle (32) peut s'écrire dans ce cas

$$\mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + n\varphi s i + C\theta = 0$$

ou

$$i = -\frac{1}{n\varphi s}\left(C\theta + \mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{n\varphi s}\left(C\frac{d\theta}{dt} + \mathfrak{I}\frac{d^3\theta}{dt^3}\right).$$

D'autre part, $\mathcal{L}$ étant la self-induction du circuit, on a

$$i = \frac{n\varphi s\frac{d\theta}{dt} - \mathcal{L}\frac{di}{dt}}{R}.$$

En remplaçant i et $\frac{di}{dt}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\mathcal{L}\mathfrak{I}}{R}\frac{d^3\theta}{dt^3} + \mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\mathcal{L}}{R}C + \frac{s^2 n^2 \varphi^2}{R}\right)\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

qui est bien une équation du troisième ordre, ainsi qu'on l'avait annoncé précédemment.

Digitized by Google

Le coefficient de $\frac{d\theta}{dt}$ contient le carré de $ns\varphi$, car d'abord le courant induit est proportionnel à φ et à la surface totale embrassée ns et l'action du champ (moment) qui fait frein est encore proportionnelle à ces quantités et à i.

EFFET DES IMPULSIONS COMMUNIQUÉES A UN SYSTÈME MOBILE LORS DE SON PASSAGE PAR LA POSITION D'ÉQUILIBRE.

Le système ne reçoit qu'une impulsion. — Un organe qui peut prendre un mouvement sinusoïdal amorti est en équilibre. Qu'arrive-t-il si on lui communique d'une manière quelconque une vitesse initiale ε?

Par exemple, on lance dans le cadre d'un galvanomètre la décharge d'un condensateur; le cadre se met à tourner et l'on désire connaître la valeur Θ_1 de la première élongation extrême.

Cherchons la vitesse initiale qui résulte de l'application d'une force instantanée (translation), ou d'un moment U (rotation) pendant un temps τ très court par rapport à la durée de la pseudo-période.

L'équation du mouvement est

$$a_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + c_1 u = \mathrm{U}, \tag{33}$$

et l'on connaît les formes des solutions de cette équation selon les diverses valeurs des coefficients a_1, b_1, c_1.

(33) peut s'écrire :

$$a_1 d\left(\frac{du}{dt}\right) + b_1 du + c_1 u\, dt = \mathrm{U}\, dt,$$

et, si l'on intègre entre o et τ, il vient

$$a_1 \left(\frac{du}{dt}\right)_0^\tau = \int_0^\tau \mathrm{U}\, dt,$$

Digitized by Google

les autres termes disparaissant car, par hypothèse, τ est très court par rapport à la durée de la pseudo-période, donc U a cessé d'agir avant que u ait pris une valeur finie. La variation ε de vitesse est :

$$(34) \qquad \varepsilon = \left(\frac{du}{dt}\right)_0^\tau = \frac{1}{a_1}\int_0^\tau \mathrm{U}\,dt.$$

La vitesse qui a pour expression

$$a\,e^{-\lambda t}[\omega\cos\omega t - \lambda\sin\omega t]$$

doit donc être égale à ε, à l'instant $t = 0$, ce qui détermine a

$$(35) \qquad a = \frac{\varepsilon}{\omega}$$

avec

$$\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}.$$

Mais la valeur u_1 de la première élongation est la valeur de u au moment où la vitesse s'annule, ce qui a lieu pour

$$(13) \qquad t = \frac{\psi}{\omega};$$

on a alors

$$(36) \qquad u_1 = \frac{\varepsilon}{\omega}e^{-\lambda\frac{\psi}{\omega}}\sin\psi.$$

Tel est l'écart maximum que va prendre le mobile immédiatement après avoir reçu l'impulsion ε.

Exercice. — Appliquer les formules précédentes au cas du galvanomètre à mouvement de translation décrit (*fig.* 22).

1. Galvanomètre à aimant mobile. — A titre d'exemple, calculons l'élongation d'impulsion de l'aiguille d'un galva-

Digitized by Google

nomètre lorsque la bobine de ce galvanomètre reçoit la décharge q d'un condensateur, ou une quantité q d'électricité induite dans un transformateur. Comme le moment de la force directrice de l'aiguille est proportionnel au sinus de la déviation actuelle de celle-ci, on supposera, pour simplifier, que l'élongation d'impulsion reste petite.

Si i est le courant qui circule dans le cadre à l'instant t le champ électromagnétique agissant sur l'aimant de moment magnétique $\mathfrak{M}$ est Gi, et nous avons

$$U = \mathfrak{M} G i.$$

La variation ε de la vitesse angulaire est

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M} G}{\mathfrak{I}} \int_0^\tau i\,dt = \frac{\mathfrak{M} G q}{\mathfrak{I}}, \tag{34}$$

car

$$a_1 = \sum m r^2 = \mathfrak{I}.$$

L'amplitude angulaire sera donc

$$\Theta_1 = \frac{\mathfrak{M} G q}{\mathfrak{I} \omega} e^{-\lambda \frac{\psi}{\omega}} \sin\psi;$$

mais

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\omega}{\lambda}, \tag{12}$$

donc

$$\sin\psi = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4\pi^2}}},$$

d'où

$$\Theta_1 = \frac{\mathfrak{M} G q}{\mathfrak{I} \omega} e^{-\lambda T \frac{\psi}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4\pi^2}}}.$$

Cette formule met en évidence λT qui est le décrément

Digitized by Google

logarithmique de l'appareil et qui est accessible à l'expérience (p. 43). On peut donc calculer ψ et par conséquent Θ_1 si l'on a déterminé les constantes G et M.

Mais, en général, le problème se présente autrement : on observe Θ_1 et l'on veut en déduire q. Il est alors commode de transformer la formule.

Si le champ directeur de l'aiguille aimantée a pour intensité φ, le coefficient $\frac{c_1}{a_1}$ de l'équation (33) a pour valeur

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{\mathfrak{M}\varphi}{\mathfrak{I}} = \omega^2 + \lambda^2. \tag{37}$$

Remplaçons $\mathfrak{I}$, dans l'expression de Θ_1, par sa valeur tirée de (37), il vient

$$\Theta_1 = \frac{Gq}{\varphi}(\omega^2 + \lambda^2)\frac{e^{-\lambda T\frac{\psi}{2\pi}}}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4\pi^2}}},$$

d'où

$$q = \Theta_1 \frac{\varphi}{G} e^{\lambda T\frac{\psi}{2\pi}} \frac{T}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 T^2}{4\pi^2}}}. \tag{38}$$

II. **Galvanomètre unipolaire.** — *Problème.* — Un galvanomètre comprend un aimant vertical AA′ rectiligne et très long dont l'extrémité supérieure est entourée par un cadre C mobile, de résistance R suspendu à un fil de torsion F placé dans le prolongement de l'axe de l'aimant. Le courant est conduit à C et en sort par des fils sans réaction placés en a et b (*fig.* 28).

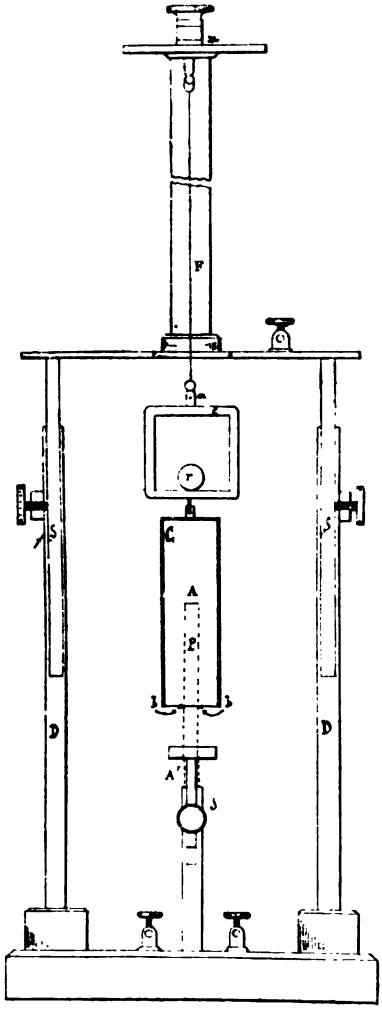
---

(1) A. Guillet, *Sur une forme simple de magnétomètre* (*Comptes rendus*, 1899).

Digitized by Google

1° On fait passer un courant d'intensité i dans l'appareil. Calculer le moment déviant.

Fig. 28.



2° On amène le cadre dans une position faisant un

Digitized by Google

angle θ avec la position d'équilibre. Déterminer la loi du mouvement du cadre lorsqu'il est abandonné à lui-même.

3° Pendant un temps très court, on fait passer à travers le cadre une quantité q d'électricité. Calculer la première élongation maximum Θ_1.

1° Il suffit de tenir compte de la masse magnétique m du pôle placé à l'intérieur du cadre. Si $\mathfrak{M}$ est le moment du couple agissant sur le cadre lorsque dans chacune de ses branches circule le courant $\frac{i}{2}$, le travail $\mathfrak{T}$ relatif à un tour complet est

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M} \times 2\pi,$$

car, par raison de symétrie, $\mathfrak{M}$ est constant.

Pour cette même raison, le flux embrassé par le cadre est toujours nul, mais pour un tour complet le flux coupé Φ est (théorème de Gauss)

$$\Phi = 4\pi m.$$

Donc

$$\mathfrak{T} = i\Phi = 4\pi mi.$$

On en déduit, en comparant les deux valeurs de $\mathfrak{T}$,

$$\mathfrak{M} = 2mi.$$

Si C est la constante de torsion du fil et α la déviation, on a

$$mi = \frac{C}{2}\alpha.$$

Cet appareil permet donc d'étudier facilement l'aimantation au point de vue des facteurs qui peuvent en modifier l'état : trempe, chocs, arrachements, recuits, etc.

En effet, après avoir fait subir à l'aimant une modification quelconque on a, en le reportant dans l'appareil actionné

Digitized by Google

par le même courant i,

$$m'i = \frac{C\alpha'}{2},$$

d'où

$$\frac{m'}{m} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ mesure la modification *définie* subie par l'aimant au point de vue du magnétisme libre.

2° Quand le cadre, abandonné à lui-même, tourne d'un angle $d\theta$, il y apparaît une force électromotrice induite e, d'où un courant d'intensité i', et le travail produit dans cette rotation est

$$d\mathfrak{T} = \mathfrak{M}\,d\theta = 2mi'\,d\theta = ei'\,dt,$$

d'où

$$e = 2m\frac{d\theta}{dt},$$

$$i' = \frac{2m}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

et

$$\mathfrak{M} = \frac{4m^2}{R}\frac{d\theta}{dt}.$$

L'équation du mouvement du cadre est donc, en tenant compte des signes,

$$\mathfrak{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4m^2}{R}\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

d'où l'on déduirait facilement la période, le mouvement étant sinusoïdal amorti.

La résistance R pour laquelle l'appareil serait dans l'état critique est donnée par la formule

$$\frac{4m^4}{R^2} - C\mathfrak{I} = 0.$$

Digitized by Google

3° Le mouvement étant sinusoïdal amorti, au temps $t = 0$, la vitesse angulaire est

$$\theta'_0 = a\omega.$$

Or si i est l'intensité du courant de charge, l'impulsion ε est

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathfrak{J}} \int_0^t 2mi\,dt,$$

$$\varepsilon = \frac{2mq}{\mathfrak{J}}.$$

En comparant ε et θ'_0, on en déduit

$$a = \frac{2mq}{\mathfrak{J}\omega},$$

et par suite

$$\Theta_1 = \frac{2mq}{\mathfrak{J}\omega} e^{-\lambda\frac{\varphi}{\omega}} \sin\psi,$$

formule facile à modifier en y introduisant l'expression de la durée de la pseudo-période.

Le système reçoit une impulsion à chaque passage par la position d'équilibre (Méthode de répétition). — Qu'arrive-t-il si l'impulsion ε est répétée à chacun des passages du mobile par sa position d'équilibre et quelle sera la valeur de l'amplitude du mouvement de régime ?

Soit O la position d'équilibre; on donne au mobile une impulsion ε, il va en Θ_1; au moment où il repasse par O, on lui donne une nouvelle impulsion favorable $-\varepsilon$, il atteint Θ_2; à son troisième passage en O, on recommence et ainsi de suite. Si ε n'est pas trop grand et si le mouvement reste sinusoïdal amorti, il y aura, pour une certaine valeur Θ de l'élongation, compensation entre l'énergie fournie à l'équipage mobile et l'énergie absorbée par l'amortissement.

Digitized by Google

Après la première impulsion ε, l'écart angulaire extrême est

$$\Theta_1 = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda \frac{\psi}{\omega}} \sin\psi. \tag{36}$$

Comme le mouvement a pour équation

$$\theta = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

et pour vitesse

$$\frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda t} (\omega \cos \omega t - \lambda \sin \omega t),$$

le mobile revient en O pour

$$\omega t = \pi \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{T}{2},$$

époque à laquelle la vitesse est

$$\varepsilon e^{-\lambda \frac{T}{2}}.$$

Après l'impulsion, cette vitesse sera

$$-\varepsilon e^{-\lambda \frac{T}{2}} - \varepsilon$$

ou

$$-\varepsilon \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right).$$

Pour trouver Θ_2 il suffit, dans la formule (36), de remplacer ε par la nouvelle valeur de la vitesse initiale, on a donc

$$\Theta_2 = -\frac{\varepsilon}{\omega} \left(1 + e^{-\lambda \frac{T}{2}}\right) e^{-\lambda \frac{\psi}{\omega}} \sin\psi.$$

Θ_3 se calcule comme Θ_2; on cherche la vitesse au mo-

Digitized by Google

ment du troisième passage par O, on ajoute ε et l'on en déduit

$$\Theta_3 = \frac{\varepsilon}{\omega}\left(1 + e^{-\lambda\frac{T}{2}} + e^{-2\lambda\frac{T}{2}}\right) e^{\lambda\frac{\psi}{\omega}} \sin\psi$$

et d'une façon générale

$$\Theta_n = (-1)^{n+1}\frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda\frac{\psi}{\omega}} \sin\psi\left(1 + e^{-\lambda\frac{T}{2}} + e^{-2\lambda\frac{T}{2}} + \ldots + e^{-(n+1)\lambda\frac{T}{2}}\right).$$

Pour avoir l'élongation de régime, faisons tendre n vers l'infini, la parenthèse est une progression géométrique de raison $e^{-\lambda\frac{T}{2}}$; donc

$$(39) \qquad |\Theta| = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda\frac{\psi}{\omega}} \sin\psi \frac{1}{1 - e^{-\lambda\frac{T}{2}}}.$$

Cherchons la loi du mouvement lorsque l'écart angulaire de régime est atteint. Lorsque

$$\theta = a e^{-\lambda t} \sin\omega t,$$

l'élongation maximum a pour valeur

$$\Theta = a e^{-\lambda\frac{\psi}{\omega}} \sin\psi,$$

on en déduit

$$a = \frac{\Theta e^{\lambda\frac{\psi}{\omega}}}{\sin\psi};$$

la loi cherchée est donc

$$\theta = \frac{\Theta e^{\lambda\frac{\psi}{\omega}}}{\sin\psi} e^{-\lambda t} \sin\omega t,$$

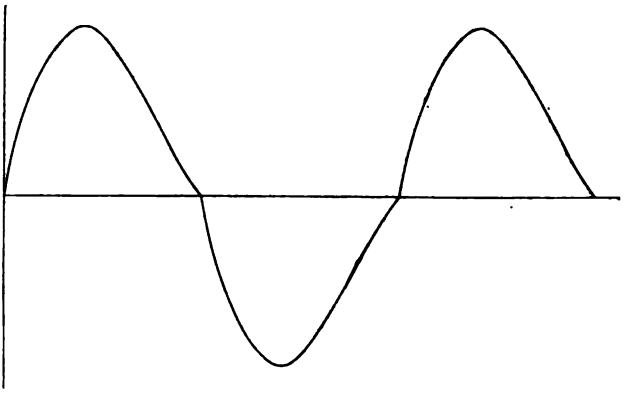
Digitized by Google

ou si l'on remplace Θ par sa valeur

$$(40) \qquad \theta = \frac{1}{1 - e^{-\lambda\frac{T}{2}}} \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

mais ceci n'est évidemment valable que dans l'intervalle o, $\frac{T}{2}$ et le diagramme du mouvement a la forme indiquée dans la figure 29.

Fig. 29.



Remarque. — Si l'on ne désire pas suivre la prise de régime, on peut parvenir immédiatement à la formule (40).

En effet, pour $t = 0$, la vitesse est $a\omega$; quand le mobile repasse par sa position d'équilibre, au temps $\frac{T}{2}$, elle est

$$-a\omega e^{-\lambda\frac{T}{2}},$$

donc l'impulsion à lui communiquer pour qu'il reprenne sa vitesse initiale est

$$\varepsilon = a\omega\left(1 - e^{-\lambda\frac{T}{2}}\right).$$

Si, au contraire, on se donne ε, on peut en déduire Θ et

Digitized by Google

la loi du mouvement, car de l'équation précédente on tire

$$a = \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{1}{1 - e^{-\lambda \frac{T}{2}}}$$

et la loi du mouvement sera

$$\theta = \frac{1}{1 - e^{-\lambda \frac{T}{2}}} \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t$$

qui donne, pour $t = \frac{\psi}{\omega}$, la valeur de Θ déjà trouvée.

Avantage de la méthode de répétition. — Supposons qu'un galvanomètre balistique reçoive un choc unique; l'élongation extrême est Θ_1. Sous l'influence d'une série d'impulsions lors de son passage par la position d'équilibre l'écart angulaire de régime est

$$\Theta = \Theta_1 \frac{1}{1 - e^{-\lambda \frac{T}{2}}}.$$

Si donc λ est petit et si l'on remplace $e^{-\lambda \frac{T}{2}}$ par son développement en série, limité au premier terme,

$$\Theta = \Theta_1 \times \frac{2}{\lambda T}. \tag{41}$$

Exemple. — Si $\lambda T = \frac{1}{200}$

$$\Theta = 400 \Theta_1$$

et tout se passe comme si l'appareil était devenu 400 fois plus sensible ou encore, à égalité de sensibilité, on peut faire usage d'un appareil beaucoup plus robuste. Les chocs donnés au passage par la position d'équilibre n'introdui-

Digitized by Google

sent aucune différence de phase, on s'en rend compte en se reportant à la représentation graphique du mouvement page 41.

La tangente tourne autour des points $\theta = 0$ sans entraîner la translation du diagramme.

Remarque. — La méthode de répétition n'est pas très employée parce que l'observateur ne produit jamais les impulsions au passage par O, ce désaccord introduit des différences de phase et trouble le mouvement. Il est donc nécessaire de rendre l'appareil automatique.

Extension des formules précédentes aux phénomènes électriques. — Montrons que l'équation du second ordre à coefficients constants (p. 54) s'applique encore à des systèmes où l'organe mobile est remplacé par de l'électricité en mouvement non permanent. Cette extension tient à ce que toute variation, dans le débit d'électricité dont un circuit est le siège, détermine, dans ce circuit, une force électromotrice proportionnelle à la vitesse de variation et qui tend à s'opposer à cette variation.

I. Considérons tout d'abord un cas où cette force électromotrice de réaction est négligeable.

Les deux armatures A et B d'un condensateur de capacité C sont chargées [1], puis réunies par un fil de résistance R (*fig.* 30).

---

[1] Si le condensateur est plan $C = \frac{S}{4\pi e}$, s'il est cylindrique $C = \frac{l}{2 \log \frac{r}{r'}}$, s'il est sphérique $C = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}$.

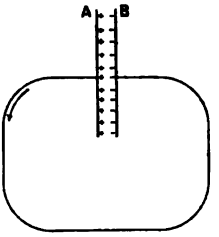
Digitized by Google

Soient

$$q = CV$$

la charge à l'instant t et i l'intensité du courant, V dési-

Fig. 30.



gnant la différence de potentiel entre les deux armatures; on a

$$i = \frac{V}{R} = \frac{q}{CR}$$

et aussi

$$i = -\frac{dq}{dt},$$

d'où l'équation

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{CR}$$

et par intégration

$$\log \frac{q}{A} = -\frac{t}{CR},$$

d'où

$$q = A e^{-\frac{t}{CR}}.$$

En écrivant que pour $t = 0$, $q = Q_0$, il vient

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}}.$$

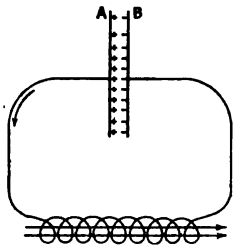
II. Supposons maintenant que le circuit comprenne une

Digitized by Google

bobine (*fig.* 31). Le courant détermine à son intérieur un flux

$$\Phi = L\,i$$

Fig. 31.



variable avec i, suivant la relation

$$d\Phi = L\,di,$$

lorsque la bobine conserve une forme invariable.

Si le condensateur n'est pas chargé et si par un moyen extérieur (introduction d'un aimant, par exemple) nous produisons la même variation de flux $d\Phi$ que précédemment, on constate que le fil est le siège d'un courant de sens inverse du précédent et qui charge d'électricité positive l'armature A.

Quelle que soit la cause de cette variation de flux, l'effet est le même, il y a donc dans le circuit deux forces électromotrices, l'une V (le condensateur tend à se décharger) et l'autre $-L\frac{di}{dt}$ (force électromotrice d'induction nécessitée par la loi de Lenz).

Nous avons donc pour la valeur de i

$$i = \frac{V - L\frac{di}{dt}}{R},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}}{R}$$

ou

$$(42) \qquad L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

équation de forme connue. Si donc, on a

$$R^2 - \frac{4L}{C} < 0,$$

la décharge est oscillatoire, et par identification avec l'équation

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + (\lambda^2 + \omega^2)q = 0,$$

on tire

$$\omega^2 + \lambda^2 = \frac{1}{LC},$$

$$2\lambda = \frac{R}{L},$$

d'où, pour la période d'oscillation électrique,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

et le diagramme de la décharge remplace le diagramme du mouvement.

Exercice 1. — Construire le diagramme de la décharge dans tous les cas, et en exprimer toutes les particularités dans le langage de l'électricité.

Exercice 2. — Formation des réduites du mouvement amorti; emploi des tableaux numériques, ou des courbes,

Digitized by Google

tirés de ces réduites, pour la meilleure disposition à donner à un appareil d'un type défini (*Voir* P. Curie : *Œuvres*).

Synchronisation. — Si un organe, naturellement animé d'un mouvement sinusoïdal amorti, est sollicité par une force supplémentaire périodique convenable, ou par une impulsion périodique, il prendra un mouvement forcé de même période que l'action supplémentaire, qui devient ainsi une *action synchronisante*.

1° L'action synchronisante s'exerce d'une manière continue et a pour loi : $a \sin(\omega' t + \varphi)$.

Le mouvement de l'organe vibrant satisfait alors à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + (\omega^2 + \lambda^2) u = a \sin(\omega' t + \varphi).$$

En exprimant que $u = b \sin(\omega' t + \psi)$ est solution de cette équation, on obtient les deux conditions

$$b^2 = \frac{a^2}{(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\omega'^2};$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{(\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)\operatorname{tang}\varphi - 2\lambda\omega'}{\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2 + 2\lambda\omega' \operatorname{tang}\varphi}.$$

La solution générale de l'équation est donc

$$u = C e^{-\lambda t} \sin \omega t + \frac{a}{\sqrt{4\lambda^2\omega'^2 + (\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2)^2}} \sin(\omega' t + \psi)$$

qui se réduit d'autant plus rapidement à son second terme que λ est plus grand.

En désignant par ε la différence de phase entre le mouvement de régime et l'action synchronisante, on a

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \operatorname{tang}(\psi - \varphi) = -\frac{2\lambda\omega'}{\omega^2 - \omega'^2 + \lambda^2}.$$

Digitized by Google

Exercice. — Étudier comment varie ε dans les cas suivants : $\omega' > \omega$; $\omega' < \omega$; $\omega' = \omega$; $\omega'^2 = \omega^2 + \lambda^2$ et exprimer les résultats en termes concrets, en prenant comme exemple le cas de deux pendules.

Exercice. — Étudier le mouvement de régime dans le cas où l'action synchronisante a pour loi : $ae^{-\alpha t}\sin(\omega' t + \varphi)$.

2° L'action synchronisante est une *impulsion*.

Voici le problème à traiter :

Un système oscillant S_1, *de période* Θ, *envoie à chaque oscillation et périodiquement, une impulsion à un second système oscillant* S_2, *de période* T ; *déterminer, s'il existe, le mouvement de régime du système* S_2.

Si les conditions expérimentales *sont compatibles avec l'établissement d'un régime*, celui-ci doit nécessairement admettre la période Θ, car les impulsions dues à S_1 doivent alors se produire toujours à l'époque où S_2 passe par une même position x_0 avec la même vitesse x'_0.

Au point de vue mathématique, tout revient donc à voir s'il est possible de trouver, pour x_0 et x'_0, des valeurs se reproduisant aux époques

$$t_0, \quad t_0 + \Theta, \quad t_0 + 2\Theta, \quad \ldots,$$

les chocs faisant, de plus, varier la vitesse de S_2 d'une même quantité ε à chacune de ces époques.

En supposant le régime établi, et prenant comme origine des temps $t_0 = 0$ l'époque d'un choc, le mouvement ultérieur du mobile pourra être suivi sur les équations

$$x = e^{-\lambda t}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{x'_0 + \lambda x_0}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$x' + \lambda x = e^{-\lambda t}[(x'_0 + \lambda x_0)\cos\omega t - \omega x_0 \sin\omega t],$$

Digitized by Google

tirées des équations du mouvement sinusoïdal amorti, x'_0 étant la vitesse du mobile *immédiatement après* le choc considéré arbitrairement comme initial. Le choc suivant, survenant à l'époque $t = \Theta$, saisira S_2 dans la position

$$x_\Theta = e^{-\lambda\Theta}\left(x_0 \cos\omega\Theta + \frac{x'_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin\omega\Theta\right),$$

et alors que sa vitesse sera

$$x'_\Theta = e^{-\lambda\Theta}\left[-\frac{\lambda}{\omega}(x'_0 + \lambda x_0)\sin\omega\Theta - x_0\omega\sin\omega\Theta + x'_0\cos\omega\Theta\right].$$

Après le choc, la vitesse devient $x'_\Theta + \varepsilon$, et il faut, pour que le régime soit établi, que le système S_2 se retrouve alors dans les mêmes conditions qu'à l'époque zéro, d'où les équations de permanence

$$x_0 = x_\Theta,$$
$$x'_0 = x'_\Theta + \varepsilon.$$

Explicitées par rapport à x_0 et x'_0, ces équations donnent

$$x_0(\omega e^{-\lambda\Theta} - \omega\cos\omega\Theta - \lambda\sin\omega\Theta) - x'_0\sin\omega\Theta = 0.$$

$$x_0\frac{\lambda^2 + \omega^2}{\omega}\sin\omega\Theta + x'_0\left(\frac{\lambda}{\omega}\sin\omega\Theta - \cos\omega\Theta + e^{\lambda\Theta}\right) - \varepsilon e^{\lambda\Theta} = 0,$$

d'où, après résolution,

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} \omega x_0 &= \varepsilon\frac{e^{-\lambda\Theta}\sin\omega\Theta}{1 - 2e^{-\lambda\Theta}\cos\omega\Theta + e^{-2\lambda\Theta}},\\ x'_0 + \lambda x_0 &= \varepsilon\frac{1 - e^{-\lambda\Theta}\cos\omega\Theta}{1 - 2e^{-\lambda\Theta}\cos\omega\Theta + e^{-2\lambda\Theta}},\end{aligned}\right.$$

ε étant, en général, une fonction de $X = x_0$. Ces équations définissent l'azimut x_0 où se produisent les chocs en ré-

Digitized by Google

gime permanent ainsi que la vitesse x'_0 du mobile immédiatement après les chocs.

Ayant remplacé, s'il y a lieu, ε par sa valeur en fonction de x_0 et tiré des équations (1)

$$\omega x_0 = \alpha, \qquad x'_0 + \lambda x_0 = \beta,$$

on suivra le mouvement, entre deux chocs ($t = 0$, $t = \Theta$), sur la formule

$$\omega x = e^{-\lambda t}(\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t),$$

et entre les deux chocs suivants ($t = \Theta$, $t = 2\Theta$) sur

$$\omega x^{-\lambda(t-\Theta)}[(\alpha \cos \omega(t - \Theta) + \beta \sin \omega(t - \Theta)].$$

En particulier, la vitesse x' s'annulant aux époques t définies par

$$\operatorname{tang} \omega t = \frac{\omega\beta - \lambda\alpha}{\omega\alpha + \lambda\beta},$$

l'écart x du mobile a pour valeur maximum

$$(6) \qquad A = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\, e^{-\frac{\lambda}{\omega} \operatorname{arc\,tang} \frac{\omega\beta - \lambda\alpha}{\omega\alpha + \lambda\beta}}}{\sqrt{(\omega\alpha + \lambda\beta)^2 + (\omega\beta - \lambda\alpha)^2}}.$$

Dans les cas particuliers où ε est indépendant de x_0, ou peut être considéré comme tel, il vient

$$(6') \qquad A = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \frac{\varepsilon\, e^{-\frac{\lambda}{\omega} \operatorname{arc\,tang} \frac{\omega - e^{-\lambda\Theta}(\omega \cos \omega\Theta + \lambda \sin \omega\Theta)}{\lambda - e^{-\lambda\Theta}(\lambda \cos \omega\Theta + \omega \sin \omega\Theta)}}}{\sqrt{1 - 2\, e^{-\lambda\Theta} \cos \omega\Theta + e^{-2\lambda\Theta}}}.$$

Exercice. — On appliquera avec succès les mêmes considérations au cas plus général où le système S_2 est soumis à deux séries de chocs de même répartition périodique Θ, une même durée Θ_1 s'écoulant entre deux chocs de même

Digitized by Google

rang des deux séries. Il y a alors à déterminer deux azimuts et deux vitesses de régime.

Égalisation des périodes de deux systèmes oscillants. — Si les périodes Θ et T des systèmes S_1 et S_2 vérifient la condition

$$\omega\Theta = k\pi \qquad \text{ou} \qquad \Theta = k\frac{T}{2},$$

on a

$$\sin\omega\Theta = 0, \qquad \cos\omega\Theta = \pm 1,$$

et les relations (1) donnent

$$x_0 = 0, \qquad x'_0 = \frac{\varepsilon}{1 \pm e^{-\lambda\Theta}}.$$

En conséquence : *pour* $\Theta = k\frac{T}{2}$, *le système* S_2 *prendra de lui-même un mouvement de régime tel que les impulsions qu'il reçoit de* S_1 *se produisent à l'instant où il passe par sa figure d'équilibre.*

Si, de plus, $\Theta = T$, l'amplitude du mouvement sera, d'après (6′),

$$(7) \qquad A = \frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{1}{1 - e^{-\lambda T}}\sin\varphi\, e^{-\frac{\lambda}{\omega}\varphi}.$$

De la proposition précédente résulte un moyen de vérifier le degré d'égalité des périodes propres de deux systèmes oscillants S_1 et S_2 (de deux pendules, par exemple), éloignés l'un de l'autre : il suffit en effet, S_2 étant entretenu par S_1, et un téléphone mis en circuit annonçant les chocs, de lire la position qu'occupe sur l'échelle d'observation — à l'instant des chocs — le spot produit par un miroir fixé à S_2. Si les appels du téléphone ont lieu au passage du spot par la position d'équilibre, le synchronisme est parfait. En char-

Digitized by Google

geant graduellement le pendule le plus rapide on l'amènera donc ainsi en synchronisme indépendant avec le pendule le plus lent.

L'équipage S_2 *est maintenu dans une position fixe par les chocs.* — Examinons encore le cas où les chocs se succèdent assez rapidement pour que l'équipage du balistique S_2 paraisse immobile dans la position x_0. Alors l'écart observé D est donné par la première des équations (I):

$$\omega D = \frac{\varepsilon e^{-\lambda\theta} \sin\omega\theta}{1 - 2 e^{-\lambda\theta} \cos\omega\theta + e^{-2\lambda\theta}}.$$

Comme ici θ est petit par rapport à T, les termes en $\left(\frac{\theta}{T}\right)^2$ sont négligeables, ainsi que ceux en λ^2 si l'amortissement est suffisamment petit, et il vient

$$\omega^2 D = \varepsilon \frac{1}{\theta}.$$

Ces considérations interviennent dans la théorie d'appareils importants relevant, le plus souvent, de l'électricité.

Exercice. — Étudier l'état variable, qui précède l'établissement du régime, en supposant la variation de vitesse ε indépendante de la position du mobile à l'instant du choc.

Ayant désigné par x_n la position du mobile à l'époque du $n^{\text{ième}}$ choc, et par x'_n sa vitesse, trouver le lieu des points

$$X = x_n, \qquad Y = \frac{x'_n}{\omega},$$

c'est-à-dire l'*indicatrice de synchronisation :* 1° pour $\lambda = 0$; 2° lorsque les périodes T et θ de S_1 et S_2 sont très voisines (voir *Journal de Physique*, 1887, p. 445, et 1907).

Digitized by Google

COMPOSITION DES VIBRATIONS.

COMPOSITION DES VIBRATIONS PARALLÈLES.

On dit que des vibrations qui se composent sur un mobile M sont *parallèles* si elles tendent à entraîner le mobile dans la même direction, le sens restant d'ailleurs arbitraire.

Si chacune des vibrations produit le même effet que si elle était seule, le déplacement u du mobile dans la direction commune UU′ des vibrations composantes est donné par la *somme algébrique* des déplacements composants

$$u = \Sigma u_k.$$

Cas de deux vibrations. — Soient

$$u_1 = a_1 \sin(\omega t + \beta_1),$$
$$u_2 = a_2 \sin(\omega t + \beta_2)$$

deux vibrations parallèles de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et dont les phases à l'instant $t = 0$ sont β_1 et β_2.

Théorème. — *Deux vibrations parallèles sinusoïdales de même période* T *se composent en une vibration sinusoïdale admettant encore la période* T.

Il faut démontrer que l'on peut mettre le déplacement sous la forme

$$(1) \qquad A \sin(\omega t + \beta).$$

On a

$$(2) \qquad \begin{aligned} u = u_1 + u_2 = {} & a_1 \sin(\omega t + \beta_1) + a_2 \sin(\omega t + \beta_2) \\ & + (a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2) \sin\omega t \\ & + (a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2) \cos\omega t. \end{aligned}$$

Digitized by Google

On pourra identifier cette forme à la forme (1) s'il est possible de déterminer A et β de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

$$(3) \qquad A \sin\beta = a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2,$$

$$(4) \qquad A \cos\beta = a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2.$$

Élevons (3) et (4) au carré, et ajoutons membre à membre, il vient

$$(5) \qquad A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) ;$$

en divisant (3) et (4) membre à membre, on tire

$$(6 \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{a_1 \sin\beta_1 + a_2 \sin\beta_2}{a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2}.$$

De (5) il résulte que $\cos(\beta_1 - \beta_2)$ variant de -1 à $+1$, A^2 varie de $(a_1 - a_2)^2$ à $(a_1 + a_2)^2$.
Une variation de la *différence de phase* des deux mouvements entraînera donc une variation dans l'amplitude du mouvement résultant, mais celle-ci restera toujours comprise entre

$$a_1 - a_2 \quad \text{et} \quad a_1 + a_2.$$

Les équations (5) et (6) peuvent toujours être résolues, car

$$a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)$$

est positif puisque la plus petite valeur de cette expression est $(a_1 - a_2)^2$.

Quant à la tangente (6), elle peut recevoir toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.

Digitized by Google

Examinons quelques cas particuliers :

1° $$\beta_1 - \beta_2 = 2k\pi, \qquad \cos(\beta_1 - \beta_2) = 1,$$
$$A^2 = (a_1 + a_2)^2;$$

2° $$\beta_1 - \beta_2 = (2k+1)\pi, \qquad \cos(\beta_1 - \beta_2) = -1,$$
$$A^2 = (a_1 - a_2)^2;$$

et si
$$a_1 = a_2 = a, \qquad A^2 = 0,$$

relation qui entraîne l'immobilité du point M ;

3° $$\beta_1 - \beta_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \cos(\beta_1 - \beta_2) = 0,$$

alors
$$A^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

et les deux vibrations sont dites *conjuguées*.

Reprenons la formule (5) et posons $a_1 = a_2 = a$, on a

$$A^2 = 2a^2[1 + \cos(\beta_1 - \beta_2)] = 4a^2 \cos^2 \frac{\beta_1 - \beta_2}{2};$$

de même (6) donne

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Remarque. — L'intensité mécanique (sonore ou lumineuse) i_k d'un mobile vibrant de masse m est représentée par son énergie cinétique moyenne

$$i_k = m\pi^2 a_k^2 N_k^2,$$

a_k désignant l'amplitude et N_k la fréquence. Multiplions alors les deux membres de (5) par $m\pi^2 N^2$, il vient

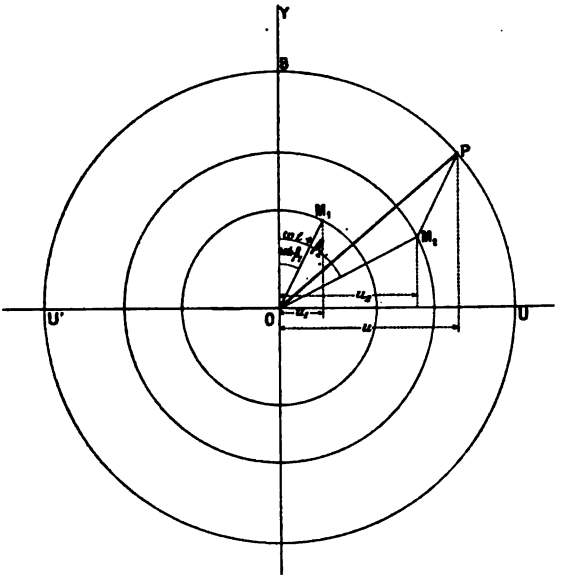
$$I = i_1 + i_2 + 2i_1 i_2 \cos(\beta_1 - \beta_2),$$

I étant l'intensité résultante.

Digitized by Google

Composition de deux vibrations parallèles en utilisant la représentation par le mouvement circulaire uniforme. La formule (5) s'interprète aisément dans la représentation par le mouvement circulaire uniforme. Soient deux circonférences concentriques et les deux mobiles M_1 et M_2 relatifs aux vibrations u_1 et u_2; l'angle M_1OM_2 est constant puisque les vitesses angulaires des mobiles M_1 et M_2 sont égales, il mesure la différence de phase des deux vibrations.

Fig. 32.



Si l'on mène par M_2 une ligne M_1P égale, parallèle à OM_1 et de même sens que OM_1, on a, par le triangle OM_2P,

$$OP^2 = \overline{OM_2}^2 + \overline{M_2P}^2 + 2\,\overline{OM_2}\,\overline{M_2P}\cos(\beta_1 - \beta_2),$$

d'où

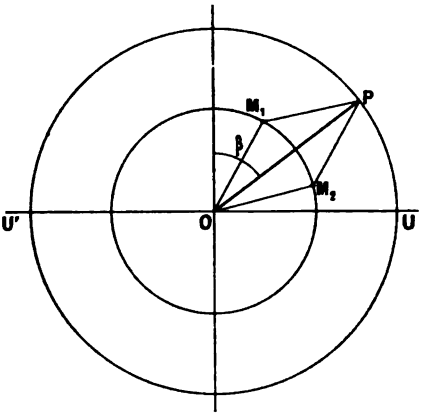
$$OP = A.$$

Digitized by Google

Plus généralement on peut aussi remarquer que u_1 étant la projection sur U'U (*fig.* 32) de OM_1 et u_2 de OM_2, la projection de OP est $u_1 + u_2$, en sorte que la longueur constante OP projetée sur UU' représente le mouvement résultant. Comme OP est invariablement lié au système M_1OM_2 qui tourne autour de O avec la vitesse angulaire ω, OP tourne aussi autour de O avec la vitesse angulaire ω et par suite la projection de P sur U'U est animée d'un mouvement vibratoire harmonique qui caractérise le mouvement résultant des vibrations harmoniques parallèles u_1 et u_2. OP est *l'amplitude du mouvement résultant* et l'angle BOP *sa phase initiale.*

Cette méthode graphique permet de retrouver les résultats obtenus par le calcul dans les divers cas particuliers où nous nous sommes placés précédemment.

Fig. 33.



Comme application nous examinerons le cas de

$$a_1 = a_2 = a.$$

Digitized by Google

M_1 et M_2 sont alors sur la même circonférence, la figure OM_1M_2P est un losange et l'on a (*fig.* 33)

$$\omega t + \beta = \frac{\omega t + \beta_1 + \omega t + \beta_2}{2} = \omega t + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

puisque OP est bissectrice de M_1OM_2 ; en simplifiant il vient

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

ce que l'on avait déjà trouvé.

Expérience. — 1° Réalisons expérimentalement la composition de deux mouvements sinusoïdaux parallèles de même période, et pour cela utilisons deux diapasons, D_1 et D_2, munis chacun d'un miroir M_1 et M_2 à l'extrémité de l'une de leurs branches, les diapasons D_1 et D_2 vibrant verticalement tous les deux. Pour que D_1 et D_2 aient exactement la même période, entretenons D_2 au moyen de D_1 (liaison synchronisante).

Un rayon lumineux issu d'une source S vient après réflexion sur M_1 et M_2 donner sur un écran E une image I d'un point O. D_1 et D_2 vibrant à la fois, le point I décrit une droite sur l'écran, et par suite de la persistance des impressions rétiniennes, la grandeur de ce segment de droite représente l'amplitude totale A. On fait varier la différence de phase en modifiant légèrement les conditions de l'entretien. En arrêtant soit D_1, soit D_2, nous pouvons apprécier les amplitudes respectives a_1 et a_2 et l'emploi du miroir tournant uniformément donne sur l'écran la sinusoïde résultante.

2° Si l'on rend D_1 et D_2 indépendants, les deux mouve-

Digitized by Google

ments parallèles à composer sont de la forme

$$u_1 = a_1 \sin \omega_1 t,$$
$$u_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \beta)$$

en posant

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon ;$$

il vient pour l'amplitude A du mouvement résultant

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varepsilon t + \beta).$$

A varie donc entre $(a_1 - a_2)^2$ et $(a_1 + a_2)^2$; c'est ce que l'expérience vérifie. Il se produit ce que l'on appelle des *battements*. Cherchons leur fréquence v, elle est déterminée par la condition

$$\varepsilon \frac{1}{v} = 2\pi,$$

qui donne

$$v = \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\omega_2}{2\pi} - \frac{\omega_1}{2\pi} = N_2 - N_1,$$

N_2 et N_1 étant respectivement les fréquences de D_1 et D_2.

Exercice. — Établir ces résultats en utilisant la représentation par le mouvement circulaire uniforme.

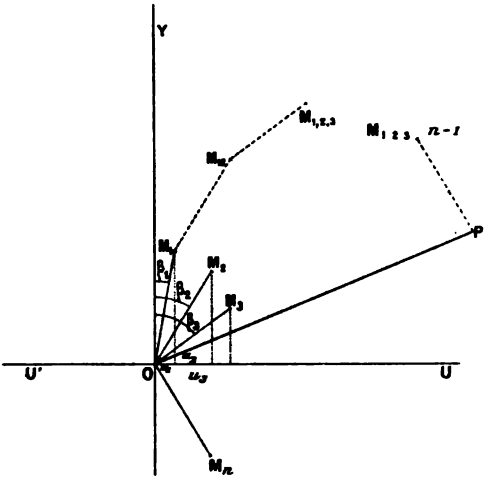
Établir et discuter l'équation de la courbe que donne sur l'écran le miroir tournant dans l'expérience 2°.

Généralisation : Polygone de Fresnel. — Théorème. — *Un nombre quelconque de mouvements sinusoïdaux de même période* T *agissant de manière à entraîner un mobile sur une même droite* U'U (*fig.* 34), *sans s'influencer mutuellement, font prendre au mobile* M *un mouvement sinusoïdal de même période* T *que les mouvements composants. Et le mouvement résultant est représenté, en ampli-*

Digitized by Google

tude et en phase, par la résultante du polygone des vecteurs tournants qui représentent respectivement, en amplitude et en phase, les mouvements composants.

Fig. 34.



1° Partons de la représentation par le mouvement circulaire uniforme.

Comme on sait composer deux mouvements, un mode de raisonnement identique à celui que l'on utilise dans la composition des forces, permet de passer du cas de deux vibrations à celui de 3, 4, ..., n vibrations. On est ainsi naturellement conduit à la construction du *polygone des vibrations.*

Soit à composer les mouvements sinusoïdaux parallèles $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_n$ de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Représentons par $OM_1, OM_2, \ldots, OM_n$ les droites animées d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire commune ω et dont les projections sur U'U représentent les

Digitized by Google

mouvements composants u_1, u_2, ..., u_n à l'instant t. Pour avoir l'amplitude A_{12} du mouvement résultant de $u_1 + u_2$, il faut mener par M_1 le vecteur M_1M_{12} équipollent à OM_2, OM_{12} représente alors A_{12}; pour avoir l'amplitude correspondant à $u_1 + u_2 + u_3$, on recommence sur OM_{12} et OM_3 la même construction; on a ainsi A_{123}, ...; en continuant, on arrive à $OP = A$, qui est l'amplitude résultante.

Comme dans le cas des forces, l'ordre de composition est indifférent.

L'angle YOP donne la *phase* du mouvement résultant.

2° La méthode d'identification s'applique également sans difficulté. Si l'on veut déterminer A et β de façon que

$$A \sin(\omega t + \beta) = \sum_1^n a_k \sin(\omega t + \beta_k),$$

il faut que A et β satisfassent aux conditions

$$A \cos\beta = \Sigma a_k \cos\beta_k,$$
$$A \sin\beta = \Sigma a_k \sin\beta_k$$

qui sont précisément les relations que l'on obtiendrait en écrivant que la résultante OP du polygone des bras tournants a ses projections sur OU et OY égales à la somme algébrique des projections des composantes OM_1, OM_2, ..., OM_n sur ces axes.

En élevant au carré les deux équations et en ajoutant, il vient

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots + 2 a_i a_k \cos(\beta_i - \beta_k) + \ldots$$

ou

$$A^2 = \sum_1^n a_k^2 + 2 \sum a_i a_k \cos(\beta_i - \beta_k)$$

Digitized by Google

en les divisant membre à membre, on a :

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\Sigma a_k \sin\beta_k}{\Sigma a_k \cos\beta_k}.$$

Remarque. — Tous les bras OM_1, OM_2, ..., OM_n tournant avec la même vitesse angulaire, la figure polygonale reste invariable et la résultante OP tourne, comme cette figure, avec la vitesse angulaire ω.

Pour fixer la construction, nous pouvons donc faire tourner l'ensemble d'un angle ωt dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre et faire la construction en mettant simplement en évidence les phases à l'instant $t = 0$ (phases initiales), c'est-à-dire $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. L'angle YOP a alors pour valeur β.

Application de la règle de Fresnel à quelques cas particuliers. — Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse sur les amplitudes a_k, ou sur les phases β_k à l'instant $t = 0$. Supposons que

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \ldots = a_n = a$$

et que les phases β_k, écrites dans un ordre convenable, forment une progression arithmétique.

Soit donc à composer les mouvements parallèles

$$a\sin(\omega t + \beta_1), \quad a\sin(\omega t + 2\beta_1), \quad \ldots, \quad a\sin(\omega t + n\beta_1).$$

Posons

$$A\sin(\omega t + \beta) = \Sigma a_k \sin(\omega t + k\beta_1),$$

on a par identification

$$A\cos\beta = a(\cos\beta_1 + \cos 2\beta_1 + \ldots + \cos n\beta_1),$$
$$A\sin\beta = a(\sin\beta_1 + \sin 2\beta_1 + \ldots + \sin n\beta_1),$$

Digitized by Google

et l'on est ramené à calculer des sommes S et Σ de la forme générale

$$S = \sin v + \sin(v+\varepsilon) + \ldots + \sin(v+n\varepsilon)$$

et

$$\Sigma = \cos v + \cos(v+\varepsilon) + \ldots + \cos(v+n\varepsilon).$$

Pour calculer S remarquons que

$$\cos[v+(p-1)\varepsilon] - \cos[v+(p+1)\varepsilon] = 2\sin\varepsilon\sin(v+p\varepsilon);$$

faisons dans cette formule successivement $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, il vient, après avoir ajouté membre à membre les égalités obtenues :

$$\begin{aligned}&[\cos v + \cos(v-\varepsilon)]\\ &\quad - \{\cos(v+n\varepsilon) + \cos[v+(n+1)\varepsilon]\} = 2S\sin\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, en remplaçant les sommes de cosinus par un produit,

$$S\sin\varepsilon = 2\cos\frac{\varepsilon}{2}\left[\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}\sin\left(v+n\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

ou

$$2S\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} = 2\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}\sin\left(v+n\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad S = \frac{\sin\frac{(n+1)\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\sin\left(v+n\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On obtiendra de même Σ en partant de l'identité en sinus qui correspond à l'identité en cos qui a fourni S.

Remarque. — Si l'on veut calculer d'un même coup les sommes S et Σ, il suffit de les associer et de considérer la

Digitized by Google

somme

$$\begin{aligned}\Sigma + iS = \cos v + i \sin v + \ldots \\ + \cos(v + p\varepsilon) + i \sin(v + p\varepsilon) + \ldots \\ + \cos(v + n\varepsilon) + i \sin(v + n\varepsilon),\end{aligned}$$

i étant égal à $\sqrt{-1}$. D'après l'identité d'Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

on a l'égalité

$$\Sigma + iS = e^{iv} + e^{i(v+\varepsilon)} + \ldots + e^{i(v+p\varepsilon)} + e^{i(v+n\varepsilon)}$$

où le second membre est une progression géométrique de raison $e^{i\varepsilon}$.

Par suite,

$$\Sigma + iS = e^{iv} \frac{e^{(n+1)i\varepsilon} - 1}{e^{i\varepsilon} - 1}.$$

En égalant les parties réelles et les coefficients de i, on obtient pour S la valeur déjà trouvée et pour Σ l'expression

$$(2) \qquad \Sigma = \frac{\cos(n+1)\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \sin\left(v + n\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Remarque. — Au point de vue du calcul des imaginaires, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que la vibration

$$u = a \sin(\omega t + \beta)$$

est le coefficient de i dans l'imaginaire $ae^{i(\omega t+\beta)}$, dont le module et l'argument sont l'amplitude et la phase du mouvement sinusoïdal considéré.

Amplitude et phase du mouvement résultant. — 1° *Emploi de formules.* — Appliquons les formules (1) et (2) au

Digitized by Google

[illegible]

$$A \sin \beta = a \frac{\sin n \frac{\beta_1}{2}}{\sin \frac{\beta_1}{2}} \sin n \frac{\beta_1}{2},$$

$$A \cos \beta = a \frac{\cos n \frac{\beta_1}{2}}{\sin \frac{\beta_1}{2}} \sin n \frac{\beta_1}{2}.$$

et par suite

$$(3) \qquad A^2 = a^2 \frac{\sin^2 n \frac{\beta_1}{2}}{\sin^2 \frac{\beta_1}{2}}$$

puis

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} (n+1) \frac{\beta_1}{2}.$$

β représente l'angle de la résultante OP avec OY à l'instant $t = 0$; si, comme le font certains auteurs, en vue de laisser arbitraire la phase de la vibration choisie comme terme de comparaison, nous prenons l'angle β de OP avec le premier bras tournant, nous devons diminuer β de β_1 et l'on a

$$\beta' = \beta - \beta_1 = (n-1) \frac{\beta_1}{2}.$$

2° *Emploi de la méthode géométrique. — Phase.* — La relation $\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} (n+1) \frac{\beta_1}{2}$ est évidente géométriquement. Nous avons à composer n bras tournants égaux formant un éventail dont l'angle d'épanouissement est β_1; en composant d'abord OM_1 et OM_n, puis OM_2 et OM_{n-1} et ainsi de suite, nous voyons que chaque résultante partielle sera dirigée suivant la bissectrice de l'angle M_1OM_n (*fig.* 35),

Digitized by Google

il en sera donc de même de la résultante OP, et la valeur de l'angle M_1OP sera $\beta' = (n-1)\frac{\beta_1}{2}$, et en comptant les angles à partir de OY

$$\beta = (n+1)\frac{\beta_1}{2}.$$

Amplitude. — Pour avoir la résultante A, appliquons la méthode de Fresnel; tous les bras étant égaux et faisant entre eux l'angle β_1, la ligne polygonale est régulière et inscriptible dans une circonférence de rayon

$$R = \frac{a}{2}\frac{1}{\sin\frac{\beta_1}{2}}.$$

D'autre part A est la longueur de la corde qui sous-tend dans cette circonférence un arc correspondant à l'angle au centre $n\beta_1$, donc

$$A = 2R\sin\frac{n\beta_1}{2}$$

et par suite

$$A = a\frac{\sin\frac{n\beta_1}{2}}{\sin\frac{\beta_1}{2}}.$$

Discussion. — Cherchons comment β et A varient lorsque la phase initiale β_1 varie, a restant fixe. Pour β_1 la réponse est immédiate puisque

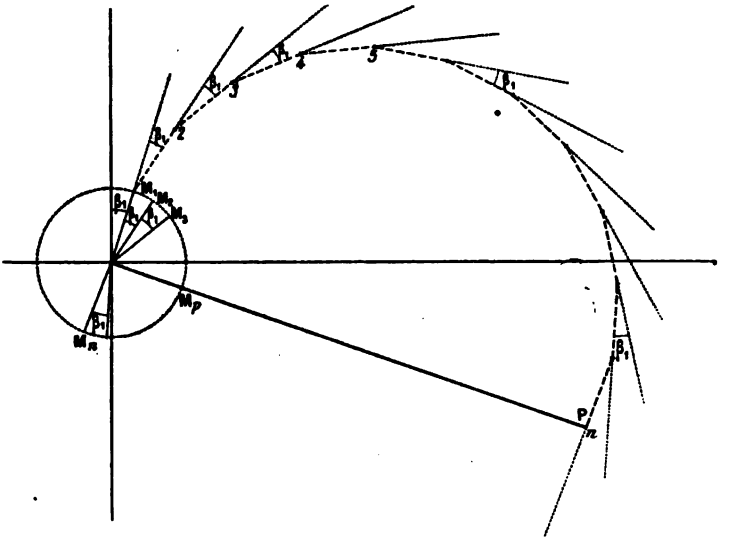
$$\beta = (n+1)\frac{\beta_1}{2};$$

occupons-nous donc de A. Deux cas particuliers importants, dont la construction graphique donne immédiatement la solution, sont à considérer.

Digitized by Google

1° Pour avoir la plus grande résultante possible, il faut que les bras tournants coïncident tous avec OM_1, de façon à se placer en prolongement l'un de l'autre dans la construction de la résultante; il faut pour cela que $\beta_1 = 2\pi$, ou,

Fig. 35.



d'une façon plus générale, $\beta_1 = 2k\pi$, alors la ligne polygonale régulière se réduit à une droite et l'on a

$$A^2 = a^2 n^2.$$

C'est un *maximum principal* pour A^2, c'est-à-dire pour l'intensité mécanique (sonore ou lumineuse) I.

2° Pour que A s'annule, il faut que la ligne polygonale se ferme, si elle forme un polygone régulier convexe, la somme des angles extérieurs d'un polygone étant 2π, on doit avoir

$$n\beta_1 = 2\pi,$$

Digitized by Google

la ligne polygonale pouvant s'enrouler plusieurs fois sur elle-même avant de se fermer, on a en général

$$\beta_1 = K\frac{2\pi}{n};$$

n ne doit pas diviser K, sans cela on retombe sur 1°, la condition précédente est alors en défaut parce que la ligne polygonale n'existe plus. Les valeurs qui conviennent pour β_1 et qui sont comprises entre o et 2π sont celles pour lesquelles on fait $K = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

Entre o et 2π, A^2 s'annule donc $(n-1)$ fois, la fonction A^2 présente donc au moins $(n-2)$ maximums dans cet intervalle. Ce sont les *maximums secondaires*. Vérifions que leur nombre est bien en réalité $(n-2)$.

Remarquons d'abord que A^2 étant toujours positif, ses zéros sont des minimums. Nous pouvons le voir par le calcul.

On a

$$I = A^2 = a^2 \frac{\sin^2 n\frac{\beta_1}{2}}{\sin^2\frac{\beta_1}{2}} = i u^2;$$

en posant $i = a^2$ et $u = \dfrac{\sin\frac{n\beta_1}{2}}{\sin\frac{\beta_1}{2}}$.

Or

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_1} = 2 i u \frac{\partial u}{\partial \beta_1},$$

par suite

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_1} = 0 \qquad \text{pour} \qquad u = 0.$$

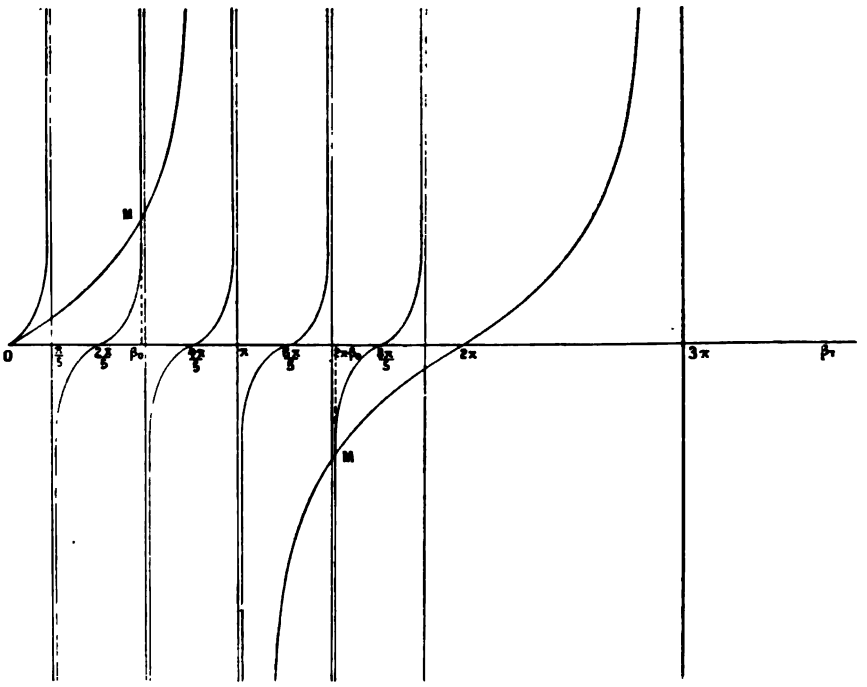
Digitized by Google

Voyons le signe de $\frac{\partial^2 I}{\partial \beta_1^2}$, on a

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \beta_1^2} = 2iu\frac{\partial^2 u}{\partial \beta_1^2} + 2i\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2;$$

pour $u = 0$. $\frac{\partial I}{\partial \beta_1} = 0$ et de plus $\frac{\partial^2 I}{\partial \beta_1^2} = 2i\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_1}\right)^2 > 0$.

Fig. 36.



Les zéros de I sont bien des minimums. I est donc minimum et s'annule dans l'intervalle de 0 à 2π pour les valeurs suivantes de β_1, qui n'annulent pas $\sin\frac{\beta_1}{2}$,

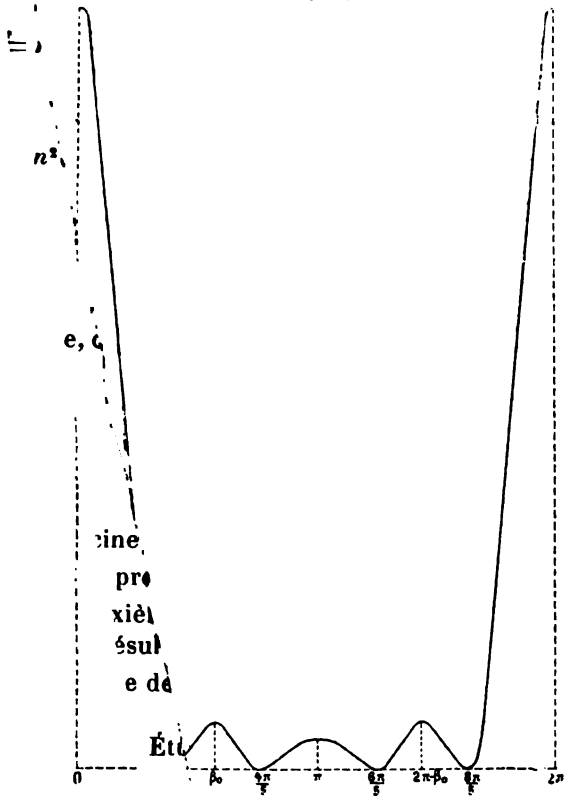
$$\frac{2\pi}{n},\quad 2\times\frac{2\pi}{n},\quad 3\times\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Digitized by Google

Pour avoir les maximums de A, déterminons les zéros de la dérivée de A par rapport à β_1, c'est-à-dire de

$$n \cos n \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_1}{2} - \sin n \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{2} = 0$$

Fig. 37.



ou les racines de

$$(4) \qquad \frac{1}{n} \operatorname{tang} n \frac{\beta_1}{2} - \operatorname{tang} \frac{\beta_1}{2} = 0.$$

Pour avoir les valeurs de β_1 qui satisfont à l'équation (4),

Digitized by Google

traçons les deux courbes

$$y_1 = \operatorname{tang}\frac{\beta_1}{2}$$

et

$$y_2 = \frac{1}{n}\operatorname{tang} n\frac{\beta_1}{2}.$$

Le graphique (*fig.* 36) relatif au cas de $n = 5$, nou[illegible] met de constater que les courbes ont des points comm[illegible] pour les abscisses $\beta_0 = \frac{2\pi}{5} + \varepsilon$, π et $2\pi - \beta_0$. Il y a [illegible] bien dans l'intervalle o et 2π, $(n-2) = 3$ maximums s[illegible]aires.

D'une manière générale les valeurs à attribu[illegible] sont telles que

$$\beta = (2k+1)\frac{\pi}{n} \pm \varepsilon,$$

ε étant d'autant plus petit que l'on se rappro[illegible]vantage du centre relatif au cas considéré.

Importance relative des maximums seco[illegible] — Pour un maximum secondaire $A_s^2 = a^2 \dfrac{\sin^2 \frac{n\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}}$ est racine de l'équation (4), c'est-à-dire que l'on a

$$\operatorname{tang} n\frac{\beta_1}{2} = n \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} \tag{5}$$

Or

$$A_s^2 = a^2 \frac{\sin^2 n\frac{\beta_1}{2}}{\sin^2 \frac{\beta_1}{2}} = a^2 \frac{\dfrac{\operatorname{tang}^2 n\frac{\beta_1}{2}}{1+\operatorname{tang}^2 n\frac{\beta_1}{2}}}{\dfrac{\operatorname{tang}^2 \frac{\beta_1}{2}}{1+\operatorname{tang}^2 \frac{\beta_1}{2}}} = n^2 a^2 \frac{1+\operatorname{tang}^2 \frac{\beta_1}{2}}{1+n^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\beta_1}{2}}$$

Digitized by Google

en remplaçant les sinus par leurs valeurs en fonction des tangentes correspondantes et en tenant compte de (5). Mais dans la dernière égalité, nous pouvons faire apparaître $\sin^2\frac{\beta_1}{2}$; en effet

$$A_s^2 = n^2a^2\frac{1+\tan g^2\frac{\beta_1}{2}}{1+n^2\tan g^2\frac{\beta_1}{2}}$$

$$= n^2a^2\frac{1}{\dfrac{1}{1+\tan g^2\frac{\beta_1}{2}}+n^2\dfrac{\tan g^2\frac{\beta_1}{2}}{1+\tan g^2\frac{\beta_1}{2}}} = \frac{n^2a^2}{1+(n^2-1)\sin^2\frac{\beta_1}{2}}.$$

Par suite, comme le maximum principal $A_p^2 = n^2a^2$, il vient

$$\frac{A_s^2}{A_p^2} = \frac{1}{1+(n^2-1)\sin^2\frac{\beta_1}{2}},$$

β_1 étant racine de l'équation (4). Pour $n=5$, si $n^2a^2=400$, la valeur du premier maximum secondaire est environ 25, celle du deuxième 16 (*fig.* 37).

Tous ces résultats trouvent des applications en électricité et dans l'étude de la diffraction.

Exercice. — Étudier la variation du rapport $\frac{A_s^2}{A_p^2}$ lorsque n varie.

Problème. — Composition de vibrations harmoniques et parallèles dont les amplitudes forment une progression géométrique décroissante et dont les différences de phase sont en progression arithmétique.

Digitized by Google

On peut écrire ces mouvements :

$$\begin{aligned}
x_1 &= a \sin \omega t,\\
x_2 &= f a \sin(\omega t + \varepsilon),\\
x_3 &= f^2 a \sin(\omega t + 2\varepsilon),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= f^{n-1} a \sin[\omega t + (n-1)\varepsilon].
\end{aligned}$$

La vibration résultante est

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A \sin(\omega t + \beta),$$

A et β sont alors déterminés par les deux conditions

$$\begin{aligned}
A \sin\beta &= a[\quad f \sin\varepsilon + f^2 \sin^2\varepsilon + \ldots + f^{n-1} \sin(n-1)\varepsilon],\\
A \cos\beta &= a[1 + f \cos\varepsilon + f^2 \cos^2\varepsilon + \ldots + f^{n-1} \cos(n-1)\varepsilon].
\end{aligned}$$

Posons $\frac{A}{a} = p$, puis

$$\begin{aligned}
P = p \cos\beta &= 1 + f \cos\varepsilon + f^2 \cos^2\varepsilon + \ldots + f^{n-1} \cos(n-1)\varepsilon,\\
Q = p \sin\beta &= \quad f \sin\varepsilon + f^2 \sin^2\varepsilon + \ldots + f^{n-1} \sin(n-1)\varepsilon;
\end{aligned}$$

on a, par suite, l'expression

$$P + Qi = p e^{i\beta} = 1 + f e^{i\varepsilon} + f^2 e^{2i\varepsilon} + \ldots + f^{n-1} e^{i(n-1)\varepsilon};$$

dans laquelle le deuxième membre est une progression géométrique de raison $f e^{i\varepsilon}$, dont la somme S est

$$S = \frac{f^n e^{in\varepsilon} - 1}{f e^{i\varepsilon} - 1} = \frac{f^n(\cos n\varepsilon + i \sin n\varepsilon) - 1}{f(\cos\varepsilon + i \sin\varepsilon) - 1}$$

ou, en développant,

$$S = \frac{(f^n \cos n\varepsilon - 1) + i f^n \sin n\varepsilon}{(f \cos\varepsilon - 1) + i f \sin\varepsilon} = P + Qi;$$

on déduit de là, en égalant les parties réelles et les parties

Digitized by Google

imaginaires,

$$f^n \cos n\varepsilon - 1 = P(f\cos\varepsilon - 1) - Qf\sin\varepsilon,$$
$$f^n \sin n\varepsilon \quad = Pf\sin\varepsilon \quad + Q(f\cos\varepsilon - 1).$$

En résolvant ce système d'équations, P et Q étant les inconnues, il vient

$$P = \frac{(f\cos\varepsilon - 1)(f^n\cos n\varepsilon - 1) + f^n\sin n\varepsilon}{f^2 - 2f\cos\varepsilon + 1},$$

$$Q = \frac{f^n\sin n\varepsilon(f\cos\varepsilon - 1) - f\sin\varepsilon(f^n\cos n\varepsilon - 1)}{1 - 2f\cos\varepsilon + f^2},$$

et l'intensité A de la vibration résultante a pour expression

$$(6)\quad A^2 = a^2\,\frac{\begin{array}{l}1 + f^2 + f^{2n} + f^{2n+2} - 2f\cos\varepsilon - 2f^n\cos n\varepsilon \\ \quad + 2f^{n+1}[\cos(n-1)\varepsilon + \cos(n+1)\varepsilon] \\ \quad - 2f^{n+2}\cos n\varepsilon - 2f^{2n+1}\cos\varepsilon\end{array}}{(1 - 2f\cos\varepsilon + f^2)^2}.$$

Remarque. — 1° Pour $f = 1$ on doit retrouver la formule précédemment établie. En effet, il vient, pour $f = 1$,

$$A^2 = a^2\,\frac{4 - 4\cos\varepsilon - 4\cos n\varepsilon + 2[\cos(n-1)\varepsilon + \cos(n+1)\varepsilon]}{4(1 - \cos\varepsilon)^2},$$

ce qui peut s'écrire

$$A^2 = \frac{a^2}{(1 - \cos\varepsilon)^2}(1 - \cos\varepsilon)(1 - \cos n\varepsilon) = a^2\,\frac{\sin^2\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

2° Si le coefficient d'affaiblissement $f < 1$ est tel que l'on ne commet pas d'erreur sensible en considérant le nombre des vibrations à composer comme infini, il vient, en faisant n infini dans la formule (6), ou par calcul direct,

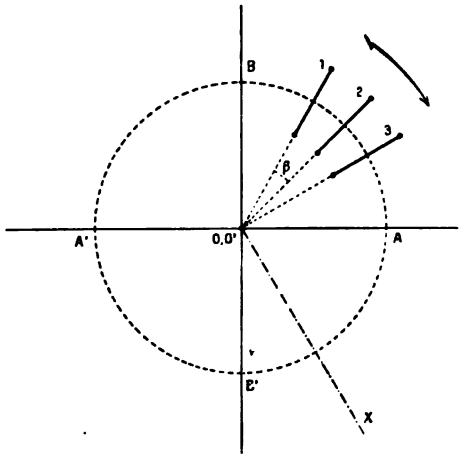
$$(7)\quad A^2 = a^2\,\frac{1}{1 + f^2 - 2f\cos\varepsilon} = \frac{1}{(1-f)^2}\,\frac{1}{1 + \frac{4f}{(1-f)^2}\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Digitized by Google

Les formules (6) et (7) interviennent en particulier dans l'étude des franges très fines que l'on obtient avec les lames semi-argentées de Pérot et Fabry.

Application du polygone de Fresnel à la composition des f. é. m. d'induction. Classification des génératrices. — *Génératrice théorique.* — Partons du dispositif théorique suivant. Des plans passant par un même axe OO′ (*fig.* 38)

Fig 38.



sont distribués *en éventail* autour de cet axe, deux plans consécutifs formant un angle de mesure β. Dans ces plans, et de part et d'autre de l'axe, des spires identiques sont fixées de manière que leurs centres soient sur une même circonférence dont le centre est sur l'axe OO′ et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

Plaçons ce système dans un champ magnétique uniforme, dont la composante perpendiculaire à l'axe OO′ a pour mesure φ, et communiquons-lui un mouvement de rotation de loi $\theta = f(t)$; que se passera-t-il?

Digitized by Google

Loi des f. é. m. induites. — Suivons la spire 1; si θ est l'angle que forme le plan de cette spire avec le plan de trace BB′ mené par OO′ perpendiculairement à φ, elle est traversée par le flux

$$\Phi = S\varphi \cos\theta,$$

et est par suite le siège d'une force électromotrice

$$(1) \qquad e_1 = S\varphi \frac{d\theta}{dt} \sin\theta.$$

En admettant, ce qui est le cas de la pratique, que

$$f(t) = \omega t,$$

ω étant la vitesse angulaire constante de l'éventail, il vient

$$e_1 = S\varphi\omega \sin\omega t,$$

d'où, en posant

$$e_0 = S\varphi\omega \qquad \text{ou} \qquad S\varphi\, 2\pi N,$$

N étant le nombre de tours effectués par l'éventail en une seconde,

$$e_1 = e_0 \sin\omega t.$$

Pour passer de la spire de rang 1 à la spire de rang p, il faut remplacer dans la formule (1) l'angle θ par l'angle

$$\theta + (p-1)\beta,$$

on a donc

$$(2) \qquad e_p = S\varphi \frac{d[\theta + (p-1)\beta]}{dt} \sin[\theta + (p-1)\beta],$$

et, dans les conditions où β est constant,

$$e_p = S\varphi\omega_1 \sin[\omega t + (p-1)\beta].$$

Digitized by Google

Les diverses forces électromotrices sont représentées par des sinusoïdes décalées les unes par rapport aux autres et successivement de $\frac{\beta}{2\pi}$ T suivant l'axe des temps.

Association des forces électromotrices induites. — 1° *Groupement alternatif.* — Associons en série p spires consécutives, on obtiendra une f. é. m. résultante

$$E_p = e_0 \sum_1^p \sin[\omega t + (x-1)\beta], \qquad x \text{ entier.}$$

Les f. é. m. s'ajoutant sans s'influencer mutuellement comme des vibrations parallèles, la règle de Fresnel s'applique et la considération du cercle circonscrit au polygone des f. é. m. donne immédiatement

$$E_p = e_0 \frac{\sin p\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left[\omega t + (p-1)\frac{\beta}{2}\right],$$

la phase de la f. é. m. résultante étant comparée à celle de la f. é. m. e_1.

On voit que le système des p spires, associées en série, donne entre ses extrémités une f. é. m. alternative sinusoïdale d'amplitude

$$E_0 = e_0 \frac{\sin p\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

et présentant avec la f. é. m. e_1 induite dans la première spire une différence de phase ψ telle que

$$\psi = (p-1)\frac{\beta}{2}.$$

Digitized by Google

Au point de vue pratique, il suffira, les spires étant reliées en série, de fixer les extrémités du circuit ainsi obtenu à deux anneaux conducteurs montés sur l'axe OO′ et d'appuyer deux balais fixés sur ces anneaux tournants.

Si l'on veut *redresser* la f. é. m. on utilisera un seul anneau, fendu dans l'azimut facile à calculer pour lequel $E_p = 0$ et les balais seront calés de façon que leur ligne de contact soit dans cet azimut.

2° *Groupements polyphasés.* — Si l'on forme à la suite du premier groupe de p spires un second groupe de q spires, on aura dans ce second groupe à composer les f. é. m.

$$e_{p+1} = e_0 \sin(\omega t + p\beta)$$
$$e_{p+2} = e_0 \sin[\omega t + (p+1)\beta]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_{p+q} = e_0 \sin[\omega t + (p+q-1)\beta],$$

ou, en retardant toutes les phases de $p\beta$,

$$e_{p+1} = e_0 \sin \omega t$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$e_{p+q} = e_0 \sin[\omega t + (q-1)\beta],$$

ce qui conduit à la f. é. m. résultante

$$E_q = e_0 \frac{\sin q\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left[\omega t + \frac{(q-1)}{2}\beta\right]$$

d'amplitude

$$E'_0 = e_0 \frac{\sin q\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

Digitized by Google

et de phase

$$\psi = p\beta - \frac{q-1}{2}\beta$$

par rapport à e_1.

La différence de phase des f. é. m. résultantes E_q et E_p est donc

$$\psi' - \psi = \frac{p-q}{2}\beta.$$

Et pour $q = p$, associations successives identiques,

$$\psi' - \psi = p\beta.$$

Les deux f. é. m. E_p et E_q présenteront la différence de phase $\frac{2\pi}{j}$, par exemple, si

$$p\beta = \frac{2\pi}{j}.$$

Si toute la circonférence est occupée par n spires régulièrement distribuées, on aura

$$\beta = \frac{2\pi}{n},$$

et par suite

$$p = \frac{n}{j};$$

soit

$$p = \frac{n}{3},$$

pour $j = 3$.

Chaque groupe devra alors contenir le tiers de la totalité des spires. Il suffira de fixer à l'axe trois anneaux cylindriques et de relier chacun d'eux aux sommets du triangle équilatéral inscrit dans la circonférence des centres des spires. Tel est le montage dit *en triangle*. La génératrice fonctionnera alors en *f. é. m. alternatives triphasées*.

Digitized by Google

Montage en étoile. — Si les trois groupes précédents sont considérés isolément et que les trois origines de ces groupes soient reliées métalliquement, les trois pôles restant 1, 2, 3 présenteront les différences de potentiel

$$E_{1.2} = E_1 - E_2; \qquad E_{2.3} = E_2 - E_3; \qquad E_{3.1} = E_3 - E_1$$

qui caractérisent le montage en étoile.

3° *Groupement dans l'espace par l'artifice du collecteur à touches. Force électromotrice constante.* — Imaginons que l'on puisse, à l'aide d'un artifice convenable, utiliser la f. é. m. provenant de la composition des spires qui occupent à chaque instant l'angle BOX. Il ne s'agit plus de suivre la f. é. m. de p spires successives parfaitement déterminées, associées en série comme on l'a fait précédemment, mais celle fournie par les p spires qui viennent prendre à chaque instant position dans l'angle fixe BOX. On a encore

$$E_p = e_0 \frac{\sin p\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left[\omega t + (p-1)\frac{\beta}{2}\right],$$

et pour l'époque $t = 0$

$$E_p = e_0 \frac{\sin\frac{p\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin(p-1)\frac{\beta}{2}.$$

Si l'éventail comporte n spires régulièrement réparties sur la circonférence, on a $\beta = \frac{2\pi}{n}$ et, par suite,

$$E_p = e_0 \frac{\sin p\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \sin(p-1)\frac{\pi}{n},$$

Digitized by Google

d'où, pour $p = \frac{n}{2}$,

$$E_p = e_0 \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \cos\frac{\pi}{n}.$$

En réalité, comme les spires sont angulairement distantes de β, dès que le groupe considéré quitte la position qu'il occupe à l'instant $t = 0$, E_p varie et ne reprend sa valeur qu'après la rotation β qui restitue le groupe dans son premier état. Calculons la valeur prise par E_p après la rotation $\frac{\beta}{2}$ qui dure un temps τ tel que $\omega\tau = \frac{\beta}{2}$; il vient, en substituant $\omega\tau$ à ωt,

$$E'_p = e_0 \frac{\sin p\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \sin p\frac{\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{e_0}{\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{pour } p = \frac{n}{2}.$$

Ainsi la f. é. m. E_p a pour valeur $f e_0 \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$, le coefficient f variant de 1 à $\cos\frac{\pi}{n}$; la valeur de $\cos\frac{\pi}{n}$ est évidemment d'autant plus voisine de 1 que n est plus grand, on obtient donc ainsi une f. é. m. presque constante.

Pour réaliser le groupement précédent il suffit de sérier les spires par l'intermédiaire de touches formant un cylindre collecteur sur lequel s'appuient deux balais dont la ligne de contact est un diamètre perpendiculaire au champ φ.

On voit sans difficulté que les deux moitiés de l'éventail fonctionnent de la même manière et produisent entre les balais la même f. é. m. en sorte que, si les spires étaient

Digitized by Google

sériées en totalité, on aurait

$$E_n = 0,$$

c'est ce que donne l'expression de $E_p(I)$ lorsqu'on y fait

$$p = n \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{2\pi}{n}.$$

Remarque. — On passe immédiatement de l'éventail théorique précédent au cas de l'anneau Gramme. Il suffit de remarquer que le flux $\frac{\Phi}{2}$ qui correspond à la moitié de l'épanouissement polaire et qui constitue l'une des dérivations magnétiques déterminées par l'anneau de fer feuilleté, pénètre progressivement dans l'anneau : nul dans la direction A'A', il est maximum dans la direction B'B, c'est-à-dire à 90° de la position précédente et, par suite, on peut considérer le flux relatif à la spire dont le plan fait l'angle θ avec BB' comme ayant pour mesure

$$\frac{\Phi}{2}\cos\theta.$$

On est ainsi conduit à l'amplitude $\frac{\Phi}{2}\omega$ pour la f. é. m. et aux groupements qui permettent de tirer à volonté de la génératrice du courant alternatif ou redressé, des courants alternatifs polyphasés ou du courant continu.

On généralisera sans peine ce mode d'exposition : on passera des f. e. m. aux courants sinusoïdaux en explicitant les phases provenant des selfs-induction et des capacités des circuits (*voir* p. 21); puis au cas du moteur électrique, et enfin aux propriétés des transmissions d'énergie à l'aide des champs tournants, par une nouvelle application du polygone de Fresnel aux projections des champs composants sur deux directions rectangulaires.

Digitized by Google

VIBRATION ELLIPTIQUE.

Composition des vibrations harmoniques rectangulaires. — Admettons qu'un mobile M soit sollicité à se déplacer *en même temps* dans deux directions rectangulaires X'X, Y'Y suivant les lois de mouvement

$$(1) \qquad x = a \sin(\omega t + \beta_1),$$

$$(2) \qquad y = b \sin(\omega t + \beta_2).$$

Le point M décrit alors dans le plan XOY, et *dans le temps* T, période commune aux deux déplacements x, y, une trajectoire fermée dont on obtiendra l'équation $f(x, y) = 0$, en éliminant t entre les équations (1) et (2). Pour effectuer cette élimination il suffit de développer les expressions (1) et (2), de les résoudre par rapport à $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, puis d'écrire que l'on a, à tout instant,

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1.$$

En opérant ainsi, il vient, après avoir posé $\beta_1 - \beta_2 = \varphi$,

$$(3) \qquad f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi - \sin^2\varphi = 0.$$

Cette courbe est une *ellipse* inscrite dans le rectangle défini par les quatre droites $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Les amplitudes a et b, que nous supposerons positives, étant données, l'orientation et la grandeur de l'ellipse trajectoire dépendent seulement de la différence de phase φ des deux vibrations composantes.

1° $\varphi = 0$. L'ellipse se réduit à la diagonale AA' (*fig.* 39) et l'équation (3) à $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$.

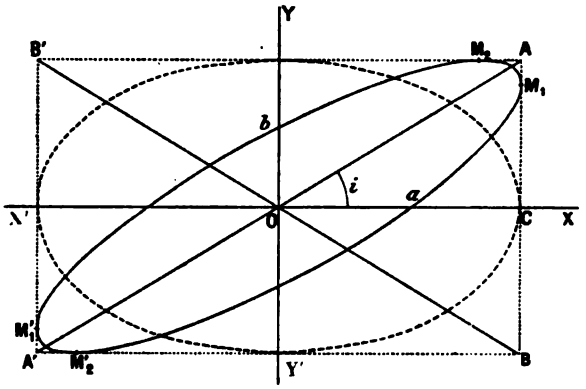
Digitized by Google

2° $\varphi = \frac{\pi}{2}$. L'ellipse (3) a alors pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

elle a donc ses demi-axes de longueur a, b, dirigés suivant OX et OY et pour $a = b$, l'ellipse devient une circonférence.

Fig. 39.



3° $\varphi = \pi$. L'ellipse se confond avec la diagonale BB' du rectangle et l'équation (3) prend la forme

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Pour obtenir toutes les trajectoires possibles, *il suffit de faire varier* φ *de* o *à* π; en effet, il est équivalent de faire varier φ de o à 2π ou de o à π, puis de o à $-\pi$; et comme en changeant φ en $-\varphi$, $\cos\varphi$ et $\sin^2\varphi$ conservent leur valeur, l'ellipse trajectoire reste la même.

En résumé : *une molécule entraînée par deux mouvements harmoniques rectangulaires simultanés, de même période* T, *décrira en général une ellipse dans le temps* T;

Digitized by Google

elle sera donc animée d'un mouvement périodique elliptique. Toutefois, le mouvement résultant restera rectiligne et s'effectuera suivant l'une des diagonales du rectangle des amplitudes des mouvements composants si la différence de phase $\varphi = \beta_1 - \beta_2$ *est égale à* $2n\pi$ *ou à* $(2n+1)\pi$, *n entier. Dans le premier cas, la trajectoire sera la diagonale traversant l'angle* YOX, *et dans le second cas l'autre diagonale. Pour* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *l'ellipse a ses axes dirigés suivant les vibrations composantes, et elle se réduit de plus à une circonférence dans le cas où les amplitudes des mouvements composants sont égales.*

On est ainsi conduit à placer à côté de la vibration *rectiligne* harmonique, la vibration *elliptique* et la vibration *circulaire* engendrées par la composition de deux vibrations rectilignes harmoniques rectangulaires.

Points de tangence. — Pour une valeur déterminée de φ, les points de tangence de l'ellipse avec les côtés du rectangle ont respectivement pour coordonnées (*fig.* 39)

$$M_1 \begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = b\cos\varphi, \end{cases} \qquad M'_1 \begin{cases} x_2 = -a, \\ y_2 = -b\cos\varphi, \end{cases}$$

$$M_2 \begin{cases} x_3 = a\cos\varphi, \\ y_3 = b, \end{cases} \qquad M'_2 \begin{cases} x_4 = -a\cos\varphi, \\ y_4 = -b. \end{cases}$$

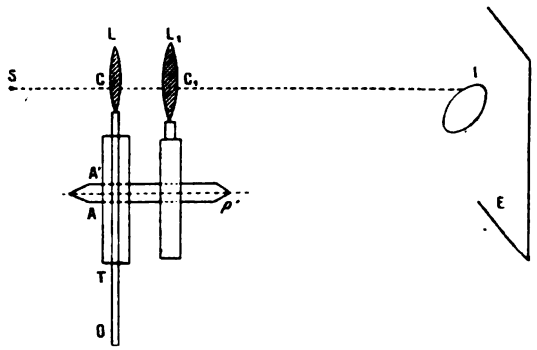
Ces points sont deux à deux *symétriques* par rapport au centre O des ellipses du système. Lorsque φ varie de o à π, le point x_1, y_1 se déplace de A à B pendant que le point $x_3 y_3$ se déplace de A à B'. Lorsque φ varie de π à 2π les deux mêmes points de tangence retournent, le premier de B en A et le second de B' en A.

Expérience. — On peut manifester toutes les particu-

Digitized by Google

larités de la discussion précédente en utilisant deux excentriques représentés figure 40.

Fig. 40.



Une lentille L est portée par une tige verticale T de longueur l, mobile autour d'un axe O. La tige T est commandée par un excentrique de centre A ($AO = l'$), tournant autour de l'axe $A'p$ ($AA' = e$). Un système analogue, mais horizontal, porte la lentille L_1 dont l'axe coïncide primitivement avec celui de L.

Un rayon lumineux issu d'un trou éclairé S traverse les deux lentilles et vient donner sur un écran E une image I de S. On imprime aux deux excentriques la même vitesse angulaire uniforme, on les monte pour cela sur le même axe pA' : les centres optiques des deux lentilles sont alors animés de mouvements sinusoïdaux rectangulaires de même période et le point I décrit une ellipse.

En changeant l'angle que fait AA' avec $A_1A'_1$, par un décalage convenable de l'un des excentriques, φ varie et l'on peut obtenir toutes les formes d'ellipses représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi,$$

Digitized by Google

et en particulier les deux diagonales. Pour $a = b$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $3\frac{\pi}{2}$, on obtient des circonférences.

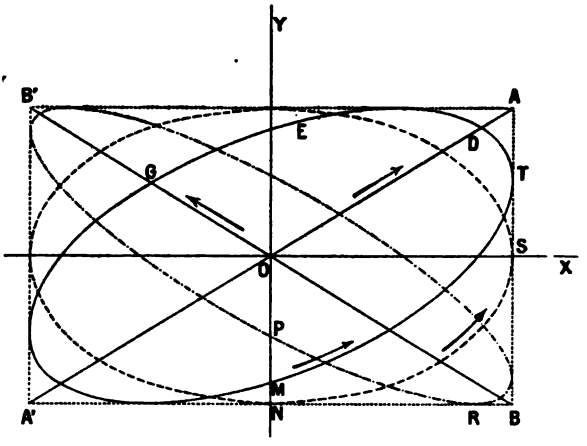
Remarque. — L'emploi de deux diapasons en synchronisation dont on fait varier la différence de phase par les moyens connus, permet de résoudre avec une grande perfection le même problème expérimental.

THÉORÈME. — *Les diagonales* AA′ *et* BB′ *du rectangle circonscrit constituent un système de diamètres conjugués pour la famille des ellipses* (3).

Le coefficient angulaire m de AA′ a pour valeur

$$m = \operatorname{tang} i = \frac{b}{a}.$$

Fig. 41.



Le coefficient angulaire m' du diamètre conjugué de la direction AA′ par rapport à l'une des ellipses est défini par

Digitized by Google

l'équation

$$\frac{1}{a^2} - (m + m')\frac{\cos\varphi}{ab} + \frac{mm'}{b^2} = 0$$

qui donne

$$m' = -\frac{b}{a},$$

coefficient angulaire de BB'.

Donc toutes les ellipses trajectoires (3) admettent un système de deux diamètres conjugués fixes qui sont les diagonales AA' et BB' du rectangle circonscrit. Les points de rencontre D et G (*fig.* 41) des diagonales avec l'une des ellipses ont pour coordonnées

$$D\begin{cases} x_1 = a\cos\frac{\varphi}{2}, \\ y_1 = b\cos\frac{\varphi}{2}, \end{cases} \qquad G\begin{cases} x_2 = a\sin\frac{\varphi}{2}, \\ y_2 = -b\sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

En posant $OD = l_1$ et $OG = l_2$, il vient

$$l_1^2 + l_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = a^2 + b^2;$$

la somme des carrés des deux demi-diamètres conjugués est constante.

Sens de circulation du mobile sur l'ellipse. — Choisissons l'origine des temps de façon à mettre les composantes du mouvement de M sous la forme

$$x = a\sin\omega t,$$
$$y = b\sin(\omega t - \varphi)$$

et déterminons la position de M à l'instant $t = 0$ et à l'instant voisin et postérieur $t = \varepsilon$.

1° $\varphi = 0.$

Digitized by Google

Le mobile décrit la diagonale AA'. A l'instant $t=0$, le mobile est en O, un peu plus tard pour $t=\varepsilon$ il est plus près de A, car $\omega t=\omega\varepsilon$ étant un petit angle positif, $\sin\omega\varepsilon$ est positif; le mobile se déplace donc de O vers A.

2° $$\frac{\pi}{2}>\varphi>0.$$

Pour $t=0$, le mobile est en M; t variant de 0 à ε, x croît. L'ellipse est donc décrite dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre dont l'ellipse constituerait le cadran.

3° $$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Le mobile décrit l'ellipse de N vers S.

4° $$\pi>\varphi>\frac{\pi}{2}.$$

Pour $t=0$ le mobile est en P. Si t varie de 0 à ε, x et y croissent. Le mobile tourne encore dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

5° $$\varphi=\pi.$$

Le mobile décrit BB'; si $t=0$ le mobile est en O; si $t=\varepsilon$, il se dirige vers B'.

6° $$\pi<\varphi<2\pi.$$

Pour $t=0$, $x=0$; $y=-b\sin\varphi$; l'angle φ étant compris entre π et 2π, son sinus est négatif; par suite y est positif; le mobile est alors sur l'axe des y positifs. Comme pour $t=\varepsilon$, x devient positif, le mobile ne peut que tourner de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour $\varphi=2\pi$, on retombe sur le cas de $\varphi=0$.

Digitized by Google

En résumé, la discussion du sens de circulation est immédiate en partant des formules

$$x = a \sin \omega t,$$
$$y = b \sin(\omega t - \varphi) \qquad \text{où} \qquad \varphi = \beta_x - \beta_y.$$

A l'instant $t = 0$, le mobile est en $x = 0$, $y = -b \sin \varphi$, c'est-à-dire ($a > 0$, $b > 0$) sur Oy' (axe des y négatifs) pour $\sin \varphi > 0$ et sur Oy (axe des y positifs) pour $\sin \varphi < 0$.

Lorsque t croît de 0 à ε, valeur voisine de zéro, x croît et par suite la projection du mobile sur X'X se déplace de O vers X, donc le mobile lui-même devra se déplacer dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire de gauche à droite pour $\sin \varphi < 0$, et de droite à gauche pour $\sin \varphi > 0$.

Or la condition $\sin \varphi > 0$ exige que l'on ait φ compris entre 0 et π et la condition $\sin \varphi < 0$ que φ soit compris entre π et 2π, ou entre 0 et $-\pi$.

Tableau.

$$\begin{array}{ll} x = a \sin \omega t & \\ y = b \sin(\omega t - \varphi) & a > 0, \quad b > 0, \\ 0 < \varphi < \pi \searrow; & \pi < \varphi < 2\pi \nearrow. \end{array}$$

D'après ce qui précède, en écrivant ($a > 0$)

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin \omega t \\ y = a \sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array} \right. \searrow$$

on aura un mouvement circulaire s'effectuant en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre, et en écrivant

$$x = a \sin \omega t$$
$$y = a \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) \nearrow$$

Digitized by Google

un mouvement de même sens que celui des aiguilles d'une montre; on dit aussi que le mouvement est senistrorsum (de gauche à droite) dans le second cas et dextrorsum (de droite à gauche) dans le premier cas. On peut encore écrire

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x = a \sin \omega t \\ y = -a \cos \omega t \end{cases}$$

et

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = a \sin \omega t \\ y = a \cos \omega t \end{cases}$$

Ce second cas s'est offert de lui-même dans la représentation du mouvement harmonique au moyen de la projection sur une droite d'un mouvement circulaire uniforme.

Évidemment on peut ajouter à ωt une même phase arbitraire β sans rien changer,

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \beta) \\ y &= -a \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad \text{s.}$$

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \beta) \\ y &= a \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad \text{d.}$$

ou, en revenant au point de départ,

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \beta) \\ y &= a \sin\left(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\omega t + \beta) \\ y &= a \sin\left(\omega t + \beta - \frac{3\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Vitesse de circulation du mobile. — Les composantes de la vitesse v du mobile de coordonnées $x = a \sin(\omega t + \beta_1)$,

Digitized by Google

$y = b \sin(\omega t + \beta_2)$ sont :

$$\frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t + \beta_1),$$

$$\frac{dy}{dt} = b\omega \cos(\omega t + \beta_2).$$

On a donc

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \omega^2[a^2\cos^2(\omega t + \beta_1) + b^2\cos^2(\omega t + \beta_2)].$$

On discutera comment varie la vitesse avec le temps. Pour $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ou $\varphi = 0$, le mobile décrit la diagonale AA′ avec la vitesse

$$v_1 = \omega\sqrt{a^2 + b^2}\cos(\omega t + \beta),$$

c'est-à-dire d'un mouvement sinusoïdal.

Pour $\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2}$,

$$v^2 = \omega^2[a^2\cos^2(\omega t + \beta_1) + b^2\sin^2(\omega t + \beta_1)].$$

Si l'ellipse se réduit à une circonférence, $a = b_1$, le mouvement devient uniforme et sa vitesse est

$$v = a\omega.$$

Exercice. — *Calculer l'énergie cinétique moyenne d'une vibration elliptique et trouver l'amplitude de la vibration rectiligne harmonique équivalente, c'est-à-dire de même intensité.*

Vibrations semblables. — On a supposé, dans ce qui précède, les amplitudes a et b constantes. Si a et b varient, $\frac{a}{b}$ restant fixe, les ellipses représentatives de la vibration

Digitized by Google

sont, pour φ constant, des figures homothétiques de centre d'homothétie O, de rapport d'homothétie $r = \frac{a}{b}$.

Balancement du système des axes lorsque φ varie. — Quand φ varie de o à 2π l'ellipse ne tourne pas, mais subit une oscillation entre les deux diagonales AA′, BB′ (*fig.* 41). Nous pouvons nous rendre compte de son balancement en étudiant, par exemple, le balancement du système des axes.

L'équation générale de l'ellipse E peut s'écrire

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - 2ba\,xy\cos\varphi = a^2b^2\sin^2\varphi.$$

Le rayon vecteur ρ d'un point $M(x, y)$ de E est tel que

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta$$

et l'équation de E devient, en (ρ, θ),

$$\rho^2[a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\varphi\sin\theta\cos\theta] = a^2b^2\sin^2\varphi,$$

d'où

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}.$$

Les angles Θ qui correspondent aux axes de l'ellipse correspondent au maximum et au minimum de ρ^2, c'est-à-dire au minimum et au maximum de

$$U = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta - 2ab\cos\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

Les valeurs Θ annulent la dérivée U'_θ.

On a donc

$$U'_\theta = 2(a^2 - b^2)\cos\Theta\sin\Theta - 2ab(\cos^2\Theta - \sin^2\Theta)\cos\varphi = 0$$

Digitized by Google

ou

$$(a^2 - b^2)\sin 2\Theta = 2ab\cos\varphi\cos 2\Theta,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} 2\Theta = \frac{2ab\cos\varphi}{a^2 - b^2}.$$

Si l'on pose $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} i$ (i angle de OX avec AA') (*fig.* 39), on a

$$\operatorname{tang} 2i = \frac{2ab}{a^2 - b^2},$$

et par suite

$$\operatorname{tang} 2\Theta = \operatorname{tang} 2i\cos\varphi.$$

Θ varie donc de $-i$ à $+i$ et le point de rencontre R du grand axe de E avec AB reste toujours entre A et B; il part de A pour $\varphi = 0$, passe en C pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, atteint B pour $\varphi = \pi$, puis revient en A pour $\varphi = 2\pi$.

Famille d'elliptiques dont le système des axes est fixe. — La direction AA' admet par rapport à toutes les ellipses représentées par l'équation (1) un diamètre conjugué fixe qui est la deuxième diagonale BB' du rectangle circonscrit à toutes les ellipses. Si donc ces deux diagonales deviennent rectangulaires, elles seront les axes de toutes les ellipses. Ceci a lieu quand le rectangle est un carré; alors $a = b$.

Constatons-le d'une autre façon : puisque

$$\operatorname{tang} 2\Theta = \frac{2ab\cos\varphi}{a^2 - b^2}$$

pour $a = b$, on a

$$2\Theta = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \Theta = \frac{\pi}{4}.$$

Les axes sont fixes et coïncident bien avec les diagonales

Digitized by Google

du carré. Pour $\sin\varphi = \pm 1$, les axes sont fixes quels que soient a et b.

Manière d'obtenir automatiquement une famille de vibrations elliptiques. — Considérons les deux mouvements sinusoïdaux rectangulaires

$$x = a \sin \omega t,$$
$$y = b \sin(\omega' t - \varphi)$$

de périodes très voisines, telles que $\omega' = \omega - \varepsilon$.

Alors

$$x = a \sin \omega t,$$
$$y = b \sin[\omega t - (\varepsilon t + \varphi)],$$

et l'on peut considérer le mouvement résultant comme provenant de deux mouvements sinusoïdaux de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la différence de phase $\psi = \varepsilon t + \varphi$ étant fonction du temps. Comme par hypothèse ε est très petit par rapport à ω, les deux périodes sont très voisines, φ varie lentement et, par suite, il en est de même de la déformation de l'ellipse.

Cette propriété permet de mettre en évidence expérimentalement les particularités relatives à la composition des mouvements sinusoïdaux rectangulaires et au sens de circulation du mobile sur la courbe.

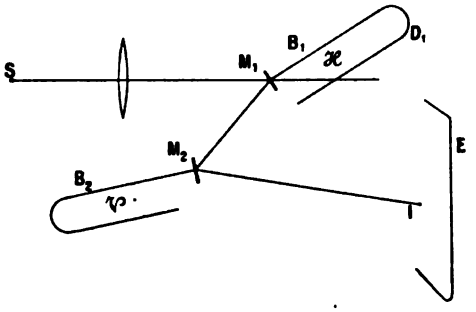
Expériences.

Composition de deux mouvements sinusoïdaux rectantangulaires de périodes très voisines. — I. *Au moyen de deux diapasons.* — Un rayon lumineux issu d'un trou éclairé S, et traversant une lentille L, se réfléchit sur un premier miroir plan M_1 (*fig.* 42) fixé à l'extrémité de

Digitized by Google

l'une des branches B_1 d'un diapason D_1 vibrant horizontalement. Le rayon subit une deuxième réflexion sur un second miroir M_2 porté par l'une des branches B_2 d'un

Fig. 42.



diapason D_2 vibrant verticalement. Finalement le rayon donne sur un écran E une image I de S.

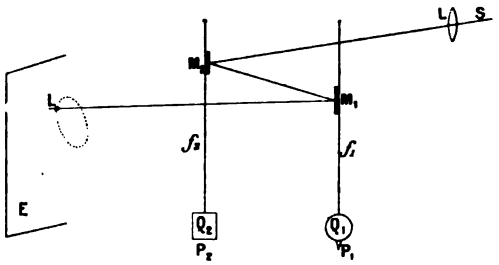
Or le mouvement d'un diapason entretenu est sinusoïdal; par suite, lorsque D_1 et D_2 vibrent, le point I décrit une ellipse visible par suite de la persistance des impressions rétiniennes. Cette ellipse se déforme peu à peu, d'autant plus lentement que les périodes de D_1 et D_2 sont plus voisines, et la courbe prend successivement toutes les formes prévues, depuis la diagonale AA′ jusqu'à la diagonale BB′. Mais comme l'on voit l'ellipse entière, il est impossible de se rendre compte, sans artifice, du sens de circulation du mobile sur la courbe.

II. *Au moyen de deux pendules.* — Deux pendules P_1 et P_2 (*fig.* 43), de périodes très voisines, sont constitués par deux masses Q_1 et Q_2 supportées par deux fils F_1 et F_2. P_1 fonctionne comme pendule de gravité, l'autre P_2 comme pendule de torsion. Un rayon lumineux issu d'un trou éclairé S se réfléchit successivement sur deux petits

Digitized by Google

miroirs plans M_1 et M_2 repectivement portés par F_1 et F_2, et donne sur l'écran E une image I de S. Quand les deux pendules oscillent, le point I décrit une ellipse qui se déforme

Fig. 43.



peu à peu et l'on constate facilement que le sens de circulation du mobile sur la courbe change chaque fois que l'ellipse se réduit à l'une des diagonales.

III. *Au moyen d'un seul pendule.* — En supprimant P_2 dans l'expérience précédente et en utilisant P_1 *à la fois* comme pendule de gravité et pendule de torsion, on arrive au même résultat, d'une manière plus élégante. On a réglé au préalable l'appareil de façon que sa période d'oscillation de torsion soit très voisine de sa période d'oscillation comme pendule de gravité.

Comme exercice, écrire et discuter la condition à réaliser et en tirer les facteurs d'une construction acceptable.

Remarque. — L'emploi des diapasons entretenus permet d'obtenir un rectangle circonscrit invariable et une ellipse visible en son entier. L'emploi du pendule permet de suivre les variations du sens de circulation. On constate ainsi que φ variant de o à π, l'ellipse exécute un demi-balancement de AA′ vers BB′ et le mobile circule en sens

Digitized by Google

inverse des aiguilles d'une montre ; φ variant de π à 2π, l'ellipse complète son oscillation en revenant de BB′ vers AA′ en sens inverse et le sens de circulation du mobile est également changé. Les changements de sens de circulation du mobile et de déplacement de la trajectoire s'effectuent aux instants où l'ellipse se réduit aux diagonales AA′ et BB′.

Périodicité des retours. — Dans le cas de deux mouvements sinusoïdaux de périodes très voisines, nous venons de voir que tout se passe comme s'ils avaient même période et une différence de phase

$$\psi = \varepsilon t + \varphi.$$

A une valeur particulière de φ correspond une ellipse E bien déterminée. L'équation de l'ellipse ne change pas si l'on substitue à φ (1) la valeur $\varphi + 2k\pi$. Donc t variant, on retrouvera la même ellipse avec le même sens de circulation du mobile sur la courbe chaque fois que ψ variera de 2π et, entre deux passages à la même position avec le même sens de parcours, il s'écoulera un temps τ défini par la relation

$$\varepsilon\tau = 2\pi,$$

d'où

$$\tau = \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

Soient ν la fréquence du retour, N et N′ les fréquences des deux mouvements sinusoïdaux de périodes T et T′. Par définition

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\omega - \omega'}{2\pi} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = N - N'.$$

Donc la fréquence du retour à la même forme et au même

Digitized by Google

sens de circulation du mobile est égale à la différence des fréquences des deux mouvements qui se composent pour fournir le mouvement elliptique.

Ceci fournit un moyen d'accorder les deux mouvements considérés : plus τ croît, plus $T - T'$ décroît, et lorsque l'ellipse demeure invariable,

$$T = T'.$$

Problème. — *On donne une vibration elliptique*

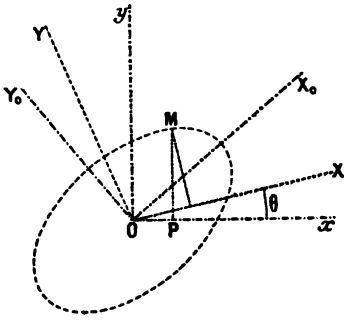
$$(1) \qquad \begin{cases} x = a \sin \omega t, \\ y = b \sin(\omega t - \varphi), \end{cases}$$

rapportée aux axes rectangulaires Ox *et* Oy (*fig.* 44); *déterminer les composantes*

$$(2) \qquad \begin{cases} X_0 = A \sin(\omega t - \beta_1), \\ Y_0 = B \sin(\omega t - \beta_2), \end{cases}$$

telles que la même vibration elliptique soit rapportée à ses axes OX_0 *et* OY_0.

Fig. 44.



1° *Relation entre les amplitudes et les différences de phases de deux couples de mouvements harmoniques rectan-*

Digitized by Google

gulaires répondant à la même ellipse. — Posons $\widehat{xOX} = \theta$ et projetons le contour OMP successivement sur OX et OY, il vient

$$X = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Y = y\cos\theta - x\sin\theta.$$

Remplaçons x et y par leurs valeurs et développons, alors :

$$(3)\quad \begin{cases} X = (a\cos\theta + b\cos\varphi\sin\theta)\sin\omega t - b\sin\varphi\sin\theta\cos\omega t, \\ Y = (b\cos\varphi\cos\theta - a\sin\theta)\sin\omega t - b\sin\varphi\cos\theta\cos\omega t. \end{cases}$$

En identifiant (2) et (3), on a :

$$(4)\qquad A\cos\beta_1 = a\cos\theta + b\cos\varphi\sin\theta,$$
$$(5)\qquad A\sin\beta_1 = b\sin\theta\sin\varphi,$$
$$(6)\qquad B\cos\beta_2 = b\cos\theta\cos\varphi - a\sin\theta,$$
$$(7)\qquad B\sin\beta_2 = b\sin\varphi\cos\theta.$$

En divisant membre à membre les égalités (5) et (4), puis (6) et (7), on trouve :

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\beta_1 = \frac{b\sin\theta\sin\varphi}{a\cos\theta + b\cos\varphi\sin\theta},$$
$$(9)\qquad \operatorname{tang}\beta_2 = \frac{b\sin\varphi\cos\theta}{b\cos\theta\cos\varphi - a\sin\theta}.$$

Pour calculer A et B, ajoutons membre à membre les égalités (5) et (4) après les avoir élevées au carré, puis faisons de même pour (6) et (7), il vient

$$A^2 = a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + b^2\sin^2\theta,$$
$$B^2 = a^2\sin^2\theta - 2ab\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta,$$

d'où l'on déduit

$$(10)\qquad A^2 + B^2 = a^2 + b^2.$$

Digitized by Google

Formons maintenant l'expression $AB \sin(\beta_1 - \beta_2)$ en partant de (4) et (5), de (6) et (7),

$$(11) \quad AB \sin(\beta_1 - \beta_2) = AB(\sin\beta_1 \cos\beta_2 - \sin\beta_2 \cos\beta_1) = -ab \sin\varphi.$$

Remarque. — On peut parvenir immédiatement aux formules (10) et (11) en partant des théorèmes d'Apollonius. En effet, en désignant par l_1 et l_2 les longueurs des demi-diamètres conjugués correspondant aux diagonales du rectangle circonscrit AA'BB', nous avons trouvé

$$l_1^2 + l_2^2 = a^2 + b^2.$$

Or $l_1^2 + l_2^2$ reste invariable lorsqu'on change les axes; on a donc

$$l_1^2 + l_2^2 = A^2 + B^2,$$

et par suite

$$a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

De plus, l'aire $4 l_1 l_2 \sin 2i$ du parallélogramme construit sur ces deux diamètres conjugués est constante; donc

$$4ab \sin\varphi = 4 l_1 l_2 \sin 2i = -4 AB \sin(\beta_1 - \beta_2)$$

et par suite

$$(12) \qquad AB \sin(\beta_1 - \beta_2) = -ab \sin\varphi.$$

On peut exprimer la relation générale $h_1^2 + h_2^2 =$ const. vérifié par les amplitudes h_1, h_2 des composantes harmoniques de l'ellipse s'effectuant suivant deux diamètres conjugués ou rectangulaires, en disant que de telles composantes sont *conjuguées*.

2° *Cas particulier où l'un des couples de mouvements rectangulaires correspond aux axes de l'ellipse.* — Si les

Digitized by Google

nouveaux axes OX et OY sont les axes de l'ellipse, on a

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2},$$

ou

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Mais dans les deux cas

$$\operatorname{tang}\beta_1 \operatorname{tang}\beta_2 = -1;$$

il résulte alors des égalités (8) et (9) que l'angle Θ de OX, qui devient OX_0, avec Ox est donné par la relation déjà trouvée

$$(13) \qquad \operatorname{tang} 2\Theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}\cos\varphi = \operatorname{tang} 2i \cos\varphi$$

avec $\operatorname{tang} i = \frac{b}{a}$.

Les formules (10) et (11) deviennent, en posant $A = A_0$, $B = B_0$,

$$A_0^2 + B_0^2 = a^2 + b^2$$

et

$$(14) \qquad A_0 B_0 = -ab\sin\varphi, \qquad \text{si} \qquad \beta_1 - \beta_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$(15) \qquad A_0 B_0 = \quad ab\sin\varphi, \qquad \text{si} \qquad \beta_1 - \beta_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Dans tous les cas nous pouvons écrire

$$A_0^2 B_0^2 = a^2 b^2 \sin^2\varphi,$$

de sorte que l'équation aux carrés des demi-longueurs des axes est

$$U^2 - (a^2 + b^2)U + a^2 b^2 \sin^2\varphi = 0.$$

A_0 et B_0 sont aussi les amplitudes des mouvements composants.

Digitized by Google

Différence des carrés des axes ou des amplitudes principales $A_0^2 - B_0^2$. — On a

$$\begin{aligned}(A_0^2 - B_0^2)^2 &= (A_0^2 + B_0^2)^2 - 4A_0^2B_0^2\\ &= (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4a^2b^2(1-\sin^2\varphi)\\ &= (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}A_0^2 - B_0^2 &= \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2\cos^2\varphi}\\ &= (a^2-b^2)\frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\cos^2\varphi}}{a^2-b^2} = \frac{a^2-b^2}{\cos 2\Theta}.\end{aligned}$$

Rapport des axes. — Calculons le rapport $\frac{B_0}{A_0} = \operatorname{tang} I$ des axes de l'ellipse. Des égalités (10), (14) et (15), et de l'expression

$$\sin 2I = \frac{2A_0B_0}{A_0^2 + B_0^2},$$

on tire

$$\sin 2I = \pm\frac{2ab\sin\varphi}{a^2+b^2}.$$

Comme, d'autre part, $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} i$, on a

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} = \sin 2i,$$

et par suite

$$\sin 2I = \pm\sin 2i\sin\varphi.$$

Exercices. I. — En partant des formules donnant $\operatorname{tang} 2I$, $\sin 2I$, $\cos 2I$ en fonction de A_0 et B_0; $\operatorname{tang} 2i$, $\sin 2i$, $\cos 2i$ et $\operatorname{tang} 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ en fonction de a, b et φ, démontrer les formules suivantes :

(1°) $\cos 2\theta\cos 2I = \cos 2i$;

(2°) $\operatorname{tang} 2I = \pm\sin 2\theta\operatorname{tang}\varphi$;

(3°) $\operatorname{tang} 2\theta = \operatorname{tang} 2i\cos\varphi$;

(4°) $\sin 2I = \pm\sin 2i\sin\varphi$.

Digitized by Google

On peut éviter, en opérant ainsi, l'emploi du changement d'axes de coordonnées.

L'ensemble des relations précédentes suffit à la résolution des divers problèmes qu'on peut avoir à se poser relativement à la génération d'une vibration elliptique.

II. — *Démontrer que la courbe*

$$x = a \sin(\omega t + \beta_1), \qquad y = b \sin(\omega t + \beta_2),$$
$$z = c \sin(\omega t + \beta_3)$$

1° *est une courbe plane ;* 2° *que cette courbe est une ellipse;* 3° *en déterminer les éléments.*

III. — Sur une sphère S de centre O, on trace deux grands cercles rectangulaires E et M, E est l'équateur et M le méridien origine. Au point P de la sphère ayant pour longitude 2θ et pour latitude $2I$ correspond une vibration elliptique, définie par le rapport de ses axes et par son orientation. Le point P est pris dans l'hémisphère supérieur si le sens de circulation est le sens direct, et dans l'hémisphère inférieur dans le cas contraire; θ est compté positivement comme en géographie.

On demande de vérifier les propriétés suivantes de cette représentation sphérique :

1° Si la vibration est rectiligne, le point P est sur l'équateur E; et, pour deux vibrations rectilignes rectangulaires, les points correspondants P_1, P_2 sont aux extrémités d'un même diamètre;

2° Les pôles de la sphère représentent les vibrations circulaires directe et inverse;

3° Si A est le point de rencontre de E et M dont les coordonnées sont (o, o), l'angle POA est égal à $2i$ et

Digitized by Google

l'angle du plan de l'équateur avec le plan POA, c'est-à-dire l'angle de E avec le grand cercle passant par des points P et A est égal à φ. (On partira des formules 1° et 2° de l'exercice I.)

Quelques équivalences cinématiques entre les vibrations rectilignes, circulaires et elliptiques. — Les composantes suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, de deux vibrations circulaires inverses sont respectivement

$$x_1 = a \sin \omega t, \qquad x_2 = \quad b \sin \omega t,$$
$$y_1 = a \cos \omega t, \qquad y_2 = -b \cos \omega t.$$

Le mouvement obtenu par la composition de ces deux circulaires est celui qui a pour composantes

$$x = x_1 + x_2, \qquad y = y_1 + y_2$$

ou

$$x = (a + b) \sin \omega t, \qquad y = (a - b) \cos \omega t.$$

En général ce mouvement résultant est elliptique, les deux demi-axes dirigés suivant Ox et Oy étant $a + b$ et $a - b$:

1° Le mouvement elliptique dont les composantes suivant les axes de l'ellipse sont $x = A \sin \omega t$, $y = B \cos \omega t$ peut donc être considéré comme résultant des deux mouvements circulaires inverses

$$x_1 = \frac{A + B}{2} \sin \omega t, \qquad x_2 = \quad \frac{A - B}{2} \sin \omega t,$$
$$y_1 = \frac{A + B}{2} \cos \omega t, \qquad y_2 = -\frac{A - B}{2} \cos \omega t.$$

Il est à remarquer que le sens de circulation sur l'ellipse

Digitized by Google

est le même que celui qui correspond au mouvement circulaire de plus grande amplitude.

2° Pour $b = a$, il vient

$$x = 2a \sin \omega t, \qquad y = 0;$$

le mouvement résultant est alors rectiligne; en conséquence un mouvement rectiligne

$$x = A \sin \omega t$$

peut être remplacé par le système des deux circulaires inverses

$$x_1 = \frac{A}{2} \sin \omega t, \qquad x_2 = \frac{A}{2} \sin \omega t,$$
$$y_1 = \frac{A}{2} \cos \omega t, \qquad y_2 = -\frac{A}{2} \cos \omega t.$$

Remarque. — Admettons que l'un des circulaires, (x_1, y_1) par exemple, subisse une variation de phase et devienne

$$x_1 = \frac{A}{2} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{par rapport à} \quad x_2 = \frac{A}{2} \sin \omega t,$$
$$y_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{»} \quad y_2 = -\frac{A}{2} \cos \omega t,$$

le mouvement résultant a alors pour composantes

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right),$$
$$y = y_1 + y_2 = A \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right);$$

le mobile se déplace donc encore suivant une droite

$$y = x \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

qui fait avec X'X un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Digitized by Google

Imprimer un retard φ à l'une des composantes circulaires revient donc à faire tourner la vibration rectiligne de $\frac{\varphi}{2}$ vers le mobile retardé.

3° Si les deux circulaires sont de même sens

$$x_1 = a \sin \omega t, \qquad x_2 = b \sin \omega t,$$
$$y_1 = a \cos \omega t, \qquad y_2 = b \cos \omega t,$$

le mouvement résultant

$$x = x_1 + x_2 = (a + b) \sin \omega t,$$
$$y = y_1 + y_2 = (a + b) \cos \omega t$$

est aussi circulaire et le sens de circulation est conservé, mais le rayon de la nouvelle vibration est égal à la somme des rayons des vibrations données.

Exercices. — 1° *Établir les résultats précédents par la règle du polygone de Fresnel.*

2° *Remplacer une vibration rectiligne par deux vibrations elliptiques de sens opposés.*

3° *Trouver la résultante des deux vibrations elliptiques*

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \qquad x_2 = a_2 \sin(\omega t + \alpha_2),$$
$$y_1 = b_1 \sin(\omega t + \beta_1), \qquad y_2 = b_2 \sin(\omega t + \beta_2).$$

Discuter.

Composition des mouvements vibratoires par graphiques tracés sur papier métrique. — 1° On obtiendra le diagramme d'un mouvement quelconque

$$U = \Sigma a_p \sin(\omega_p t + \psi_p)$$

en traçant d'abord les diagrammes de chacun des mouve-

Digitized by Google

ments composants

$$u_p = a_p \sin(\omega_p t + \psi_p),$$

puis la courbe formée par les points de coordonnées $(t, \Sigma_t u_p)$.

2° On opérera de même pour construire chacune des composantes complexes

$$x = \Sigma a_p \sin(\omega_p t + \psi_p),$$
$$y = \Sigma b_q \sin(\omega_q t + \psi_q)$$

relatives à deux mouvements simultanés s'effectuant suivant les directions X'X, Y'Y.

3° Pour deux mouvements rectangulaires simples

$$x = a \sin \omega t,$$
$$y = b \sin(\omega' t + \psi),$$

ω et ω' étant commensurables, on obtient rapidement la trajectoire

$$f(x, y) = 0,$$

ainsi que le sens de parcours, en supposant que les deux mobiles M_x, M_y, animés des mouvements circulaires uniformes qui définissent les mouvements vibratoires x, y, emportent les projetantes qui déterminent à chaque instant x et y. La construction pourra être facilitée par le tracé des deux systèmes de projetantes menées par les points divisant chacune des circonférences en un nombre n convenablement choisi de parties égales à partir des points de départ de M_x et M_y $(t = 0)$ et dans le sens de circulation de ces mobiles.

Comme exercice construire les courbes $f(x, y)$ relatives aux intervalles fondamentaux : unisson, tierce, quarte, quinte, octave, etc. et pour diverses valeurs de ψ.

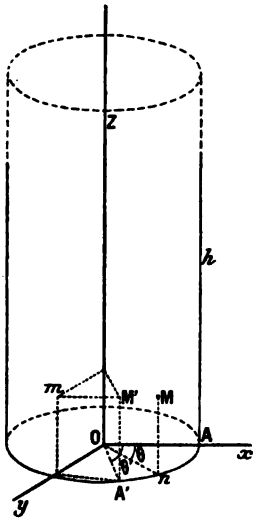
Digitized by Google

IMAGE CINÉMATIQUE DE LA PROPAGATION DES VIBRATIONS HARMONIQUES TRANSVERSALES.

Structure d'un rayon transversal. — Rappelons d'abord quelques propriétés de l'hélice.

Soit un point M pris sur un cylindre de révolution d'axe Oz (*fig.* 45) et dont la section droite est une circonfé-

Fig. 45.



rence de rayon a. Les coordonnées d'un point M quelconque pris sur la surface du cylindre peuvent être mises sous la forme

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z;$$

z est arbitraire.

En prenant z proportionnel à θ, un seul point M correspond à une valeur donnée de θ et ce point se déplace sur une courbe appelée *hélice*.

Digitized by Google

Les équations $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = k\theta$ définissent une *hélice circulaire*.

Quand l'angle θ a varié de o à 2π, z a varié de o à $2\pi k = h$; h est *le pas* de l'hélice. On peut donc écrire les équations qui définissent cette courbe comme il suit :

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\sin\theta, \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta.$$

Si l'on fait commencer une autre hélice de même pas au point A′ tel que $AOA' = \theta'$ et que l'on compte l'angle courant θ à partir de OA′, on aura pour les coordonnées de cette nouvelle courbe

$$x_1 = a\cos(\theta + \theta'), \qquad y_1 = a\sin(\theta + \theta'), \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta.$$

Si donc on pose $\theta' = \omega t$, on aura les coordonnées des points d'une hélice qui tourne autour de Oz avec la vitesse angulaire ω.

Pour $\omega > 0$ la rotation est du sens qui amène Ox sur Oy par une rotation de 90°; $\omega < 0$ correspond à la rotation de sens opposé.

Les coordonnées de la projection d'un point quelconque de cette hélice sur un plan passant par Oz, par exemple sur le plan yOz, sont donc

$$y = a\sin(\theta + \omega t), \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta.$$

A un instant donné, c'est-à-dire pour une valeur fixe de t, on aura l'hélice, en faisant varier θ, de o à 2π (1er pas), de 2π à 4π (2e pas), etc.

On peut écrire le déplacement suivant Oy sous la forme

$$y = a\sin\left(\frac{2\pi}{h}z + \omega t\right),$$

Digitized by Google

puisque $z = \frac{h}{2\pi}\theta$. En conséquence, *à un instant déterminé t_0 la projection sur un plan, yOz par exemple, passant par l'axe Oz de l'hélice, ou parallèle à cet axe, est une sinusoïde*

$$y = a \sin\left(\frac{2\pi}{h} z + \omega t_0\right).$$

Mais on peut suivre dans le temps seulement un point m_0 de la projection situé à la distance z_0 de la base considérée; on a pour ce point, aux divers instants,

$$y = a \sin\left(\frac{2\pi}{h} z_0 + \omega t\right) = a \sin(\omega t + \beta_1).$$

Chaque point m_0 de la projection est donc animé, parallèlement à Oy, d'un mouvement vibratoire harmonique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et d'amplitude a.

L'hélice par ses pas successifs détermine pour le mouvement des points m une périodicité dans l'espace et par sa rotation régulière autour de son axe une périodicité dans le temps.

La période dans l'espace est h, et la période dans le temps est marquée par le temps qu'emploie l'hélice à faire un tour.

Supposons que l'on regarde la projection à l'instant t, alors tous les points disposés sur la même génératrice sont distants de h et sont *concordants* dans leurs mouvements, car ils restent sur une même génératrice à tout instant.

Propagation. — Considérons la sinusoïde

$$y = a \sin\left(\frac{2\pi}{h} z + \omega t\right).$$

Digitized by Google

Les points qui à l'instant t_0 sont sur une même génératrice, la génératrice d'élongation maximum gg' par exemple, correspondent aux altitudes z telles que

$$\frac{2\pi}{h}z + \omega t_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier.

A un autre instant t_1, la distribution des sommets de la sinusoïde est réglée par la loi

$$\frac{2\pi}{h}z + \omega t_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \pm\frac{2\pi}{T},$$

selon le sens de rotation du cylindre.

Particularisons l'un des sommets, celui qui répond à $k = k_0$; il était d'abord à l'altitude

$$z_0 = \left(k_0 + \frac{1}{4} \mp \frac{t_0}{T}\right)h,$$

et il passe à l'altitude

$$z_1 = \left(k_0 + \frac{1}{4} \mp \frac{t_1}{T}\right)h.$$

Il s'est donc déplacé progressivement de

$$z_1 - z_0 = \mp\frac{(t_1 - t_0)}{T}h,$$

et *la sinusoïde se déplace dans son ensemble* avec la vitesse

$$V = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \mp\frac{h}{T}.$$

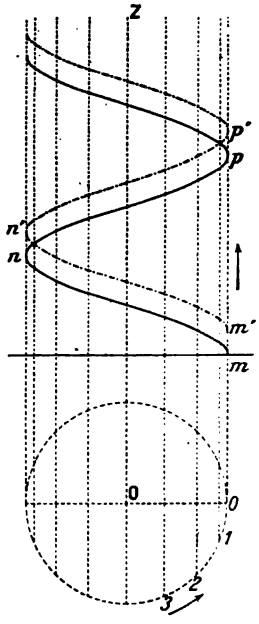
On peut dire encore que l'état vibratoire du point z_0 est passé au point z_1, c'est-à-dire s'est *propagé* de z_0 à z_1 avec la vitesse $V = \mp\frac{h}{T}$.

Digitized by Google

En faisant tourner le cylindre dans le sens qui correspond à $\omega > 0$, la propagation s'effectue vers les z négatifs avec la vitessse $V = \frac{h}{T}$; en changeant le sens de rotation, la propagation a lieu en sens inverse avec la même vitesse absolue.

On peut se rendre compte d'une manière plus concrète de la façon dont les choses se passent en utilisant les projections de l'hélice sur le plan horizontal xOy et sur le plan vertical xOz par exemple. Au moment où 1 arrivera en 0 (*fig.* 46) la génératrice $11'$ sera sur $00'$ et le point m, som-

Fig. 46.



met de la sinusoïde, sera en m'; il se sera donc déplacé progressivement pendant la rotation de m en m', en même temps n est venu en n', et la sinusoïde est en $n'm'p'$; le

Digitized by Google

mouvement de la particule m est maintenant sur la particule m', d'où la propagation mm'. Or mm' est proportionnel à la rotation correspondante $1,0$.

Mais au temps T, c'est-à-dire à la rotation 2π, correspond la translation h; donc

$$\frac{mm'}{\Delta t} = \frac{h}{T}, \qquad mm' = \frac{h}{T}\Delta t,$$

d'où

$$mm' = V\Delta t,$$

en posant

$$V = \frac{h}{T},$$

V est la vitesse de propagation.

On voit qu'il y a entre le pas h, la vitesse de propagation V et la durée de la rotation, la relation

$$h = VT.$$

Si l'on impose la vitesse de propagation V et la durée T de la rotation, il faudra tracer une hélice de pas $h = VT$ pour que le système considéré corresponde au cas donné.

Une rotation inverse du cylindre ferait apparaître un déplacement opposé de la sinusoïde, projection de l'hélice.

Transversalité de la vibration propagée. — On remarquera que la vibration rectiligne des différents points projections des points M de l'hélice sur un plan passant par Oz s'effectuent dans des directions perpendiculaires à la direction dans laquelle la vibration se propage. De telles vibrations sont dites *transversales;* la vitesse vibratoire v, parallèle à yy', est perpendiculaire à la vitesse de propagation V parallèle à Oz; de plus, V est constant, alors que v varie comme il a été expliqué dans une précédente conférence.

Digitized by Google

Expérience. — Avec le système que l'on vient d'étudier matérialisé (soit par le tracé d'une hélice opaque sur un tube de verre d'un grand diamètre, soit par un tube de Geissler contourné en forme d'hélice, soit par les têtes d'épingles identiques implantées sur une tige et normalement à l'axe (M. G. Lippmann) de façon à former une surface hélicoïdale, etc.), on peut figurer complètement toutes les particularités cinématiques de la propagation des vibrations transversales.

Il suffit de disposer l'appareil de manière à le faire tourner autour de l'axe de l'hélice et d'observer la projection de celle-ci sur un écran parallèle à l'axe de rotation. Les projections sur deux plans rectangulaires parallèles à l'axe de l'hélice représentent deux sinusoïdes décalées de $\frac{\pi}{2}$ l'une par rapport à l'autre.

Phases relatives aux différents points de Z'Z. — *Période du rayon : longueur d'onde.* — Les projections m sur le plan yOz des points M de l'hélice sont animées du mouvement

$$(1) \qquad y = a \sin\left(\frac{2\pi}{h} z + \omega t\right).$$

Lorsque z varie d'une quantité λ telle que

$$\frac{2\pi}{h}\lambda = 2\pi \qquad \text{ou} \qquad \lambda = h,$$

y et y' reprennent la même valeur : deux points m distants de λ le long de Oz ont donc des mouvements identiques et concordants. En passant du point z au point $z + \Delta z$ la phase $\frac{2\pi}{h} z + \omega t$ varie de $\frac{2\pi}{h}\Delta z$ ou $\Delta\theta$, et lorsque Δz varie de o

Digitized by Google

à h ou λ la phase varie de o à 2π et prend par suite toutes les valeurs efficaces dont elle est susceptible.

En considérant le mouvement des points m comme un mouvement propagé, on a vu qu'il fallait poser

$$h = \pm VT,$$

les deux signes répondant aux deux sens de rotation du cylindre, et par suite

$$\lambda = VT.$$

La longueur λ représente le *parcours effectué par la vibration propagée pendant la durée d'une vibration.*

En donnant à la droite Z'Z le nom de *rayon*, on peut dire que λ est la *période du rayon*, car on trouve dans la portion λ du rayon toutes les différences de phases efficaces que celui-ci comporte. En donnant en effet au tronçon λ, et suivant l'axe des z, une translation qui amène son origine à l'endroit où se trouvait d'abord son extrémité, on obtient une nouvelle portion du rayon animée des mêmes états successifs de mouvement que la première. Rien ne distingue cinématiquement l'une des portions de l'autre; elles occupent seulement des positions différentes le long du rayon. On donne à la période λ du rayon le nom de *longueur d'onde.* Cette période dépend à la fois de la période T de la vibration et de la vitesse V de propagation.

DIFFÉRENCE DE PHASE ENGENDRÉE PAR UNE DIFFÉRENCE DE MARCHE.

La notion de mouvement propagé suivant l'axe des z, à laquelle nous avons été conduits par la considération d'une hélice tournant autour de son axe, permet de donner aux

Digitized by Google

résultats précédents une forme très générale, d'une importance capitale dans l'étude des phénomènes vibratoires.

Soit $y = a \sin \omega t$ le mouvement d'une particule quelconque prise comme terme de comparaison et placée par exemple à l'origine O. On a vu que le mouvement de la particule m, située à la distance z de O, peut être considéré comme provenant du mouvement de O propagé de O en m avec la vitesse *absolue* V. L'état de mouvement en m à l'instant t est donc celui qui se trouvait en O au temps $t - \tau$, τ étant égal à la durée $\frac{z}{V}$ du parcours z. En sorte que, si à *l'instant t*

$$y = a \sin \omega t$$

est l'élongation de O, celle de m sera, *au même instant*,

$$y = a \sin \omega (t - \tau) = a \sin \omega \left(t - \frac{z}{V}\right);$$

si z est positif, il en est de même de τ, le mouvement en m est alors en *retard* de τ sur le mouvement en O ; si z est négatif le mouvement en m présente au contraire une *avance* sur celui de O. La phase de m est $\omega\left(t - \frac{z}{V}\right)$ ou encore $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{V}\right)$.

Lorsque z varie de Δz, la phase varie donc de

$$-2\pi \frac{\Delta z}{\lambda}.$$

On donne à la différence des parcours Δz le nom de *différence de marche*.

La différence de phase présentée par les mouvements de deux points atteints par le mouvement propagé est égale à $2\pi \frac{\delta}{\lambda}$, si δ est la différence de marche relative aux deux points.

Digitized by Google

En menant par $m(z)$ un plan perpendiculaire à Z'Z et imaginant que tous ses points ont le même mouvement que m, on aura l'image d'une onde plane se propageant dans l'espace normalement à Z'Z avec la vitesse V.

On exprime l'invariabilité de la direction de la vibration en disant que l'onde plane transversale considérée est *polarisée rectilignement.*

Chemins équivalents. — La vibration mettra le même temps à traverser les épaisseurs $e, e_1, e_2, \ldots$, de milieux $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, auxquels correspondent les vitesses de propagation $V, V_1, V_2, \ldots$, si l'on a

$$\frac{e}{V} = \frac{e_1}{V_1} = \frac{e_2}{V_2} = \ldots = \frac{e_p}{V_p}.$$

Les épaisseurs $e, e_1, e_2, \ldots, e_p$ ainsi déterminées sont dites *équivalentes.*

Si donc on donne une épaisseur e_p d'un milieu quelconque μ_p dans lequel la vitesse de propagation est V_p, l'épaisseur e du milieu μ qui lui est équivalente se calculera par la formule

$$e = e_p \frac{V}{V_p} = e_p n_p$$

si l'on pose

$$n_p = \frac{V}{V_p}.$$

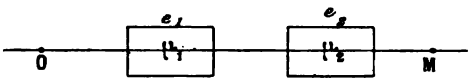
Il est souvent commode, dans les calculs, de substituer aux milieux différents que l'on peut avoir à considérer les épaisseurs équivalentes rapportées toujours à un *même milieu* μ.

Pour abréger le langage nous dirons que le rapport constant $n_p = \frac{V}{V_p}$ est l'indice du milieu μ_p par rapport au milieu μ.

Digitized by Google

Différence de marche relative à deux points d'un même rayon qui traverse plusieurs milieux. — Soit z la distance géométrique entre O et M (*fig.* 47).

Fig. 47.



La vibration doit traverser une épaisseur e_1 du milieu μ_1, à quoi elle emploie le même temps qu'à traverser l'épaisseur $e_1 n_1$ du milieu μ; de même à l'épaisseur e_2 du milieu μ_2 on peut substituer une épaisseur $e_2 n_2$ du milieu μ. Tout se passe donc au point de vue du mouvement transmis de O en M comme si ces deux points étaient séparés par une épaisseur

$$e_1 n_1 + e_2 n_2 + z - e_1 - e_2 \quad \text{ou} \quad z + (n_1 - 1)e_1 + (n_2 - 1)e_2$$

du milieu μ.

La différence de marche entre O et M, exprimée dans le milieu μ, est donc

$$\delta = z + (n_1 - 1)e_1 + (n_2 - 1)e_2$$

ou, en général,

$$\delta = z + \Sigma(n_p - 1)e_p$$

et la différence de phase est par suite

$$\frac{2\pi}{\lambda}[z + \Sigma(n_p - 1)e_p],$$

λ étant la longueur d'onde, de la vibration choisie, dans le milieu μ.

On a vu que deux mouvements parallèles ont une résultante nulle lorsqu'ils présentent une différence de phase

Digitized by Google

$\beta_1 - \beta_2 = (2k+1)\pi$. Il en sera ainsi pour deux mouvements issus d'une même source qui se composent après avoir parcouru des routes de même nature, dont les longueurs diffèrent de

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire d'un nombre impair de demi-longueurs d'onde. On dit qu'il y a *interférence* aux points d'un milieu où de tels mouvements se composent.

Il est à remarquer que les mouvements qui se composent en un point d'interférence ont quitté la source à des époques différentes. Et le temps qui s'écoule entre les deux émissions est égale à $\frac{\delta}{V}$ ou $(2k+1)\frac{T}{2}$ dans le cas précédent.

Permanence de l'état vibratoire d'une source. — S'il est nécessaire, pour qu'il y ait interférence, que les deux rayons homogènes soient issus d'un même point S (cas de la lumière, dédoublement d'une même source), cette condition n'est pas suffisante.

En effet, si le retard entre les deux vibrations est tel que la source S puisse se modifier pendant cet intervalle de temps, la différence de phase φ en un point donné de l'espace est constamment variable, et les franges ne peuvent pas s'y produire.

Le maximum de la différence de marche δ, pour laquelle les franges persistent, mesure le degré de permanence des mouvements de la source homogène considérée.

Rôle des dimensions de la source. — L'exercice suivant permettra de mettre en évidence le rôle de l'étendue de la source d'émission vibratoire.

Digitized by Google

Exercice. — Une source lumineuse monochromatique d'une certaine étendue éclaire deux petits trous S_1S_2 ($S_1S_2 = 2a$) qui jouent le rôle de centres d'émission. Les mouvements vibratoires issus de S_1 et S_2, et provenant d'un point S de la source, se composent sur un écran E parallèle à S_1S_2.

Démontrer que :

1° La frange centrale brillante est au point de rencontre de E avec la droite SO (O milieu de S_1S_2) ;

2° Soit x' la dimension de la source parallèlement à S_1S_2 ; pour que les franges brillantes provenant de l'un des bords ne se superposent pas aux franges obscures provenant de l'autre bord, il faut que S soit vu de O sous un angle α tel que

$$\tang \alpha = \frac{\lambda}{4a},$$

on désignera par λ la longueur d'onde de la lumière employée.

Interférences simultanées au même point. — Imaginons que des *vibrations* répondant aux longueurs d'onde comprises entre λ_0 et λ_1 suivent des routes présentant la même différence de marche δ.

Dans la condition

$$\delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2},$$

δ est une constante et $2k + 1$ un nombre entier impair quelconque.

Posons $u = \frac{2\delta}{\lambda}$ et faisons varier λ d'une manière continue de λ_0 à λ_1, u variera alors de u_0 à u_1 et le point (u, λ) suivra l'hyperbole équilatère d'équation

$$u\lambda = 2\delta.$$

Digitized by Google

Si allant de u_0 à u_1 on rencontre q nombres entiers impairs

$$N'_1, \quad N'_2, \quad \ldots, \quad N'_j, \quad \ldots, \quad N'_q,$$

il y aura q longueurs d'onde susceptibles d'interférer au point de rencontre des routes qui présentent la différence de marche δ, et la longueur d'onde λ'_j par exemple sera donnée par la condition

$$\lambda'_j = \frac{2\delta}{N'_j}.$$

Si le faisceau considéré renferme des λ discontinus, il faudra chercher les termes communs au groupe des λ propagés et à la suite

$$\lambda'_1, \quad \lambda'_2, \quad \ldots, \quad \lambda'_j, \quad \ldots, \quad \lambda'_q.$$

Remarque. — On prendra l'habitude de raisonner directement sur des *durées de parcours;* c'est le moyen le plus sûr, car il rend nécessaire l'examen de tous les facteurs qui peuvent intervenir dans un problème d'interférence.

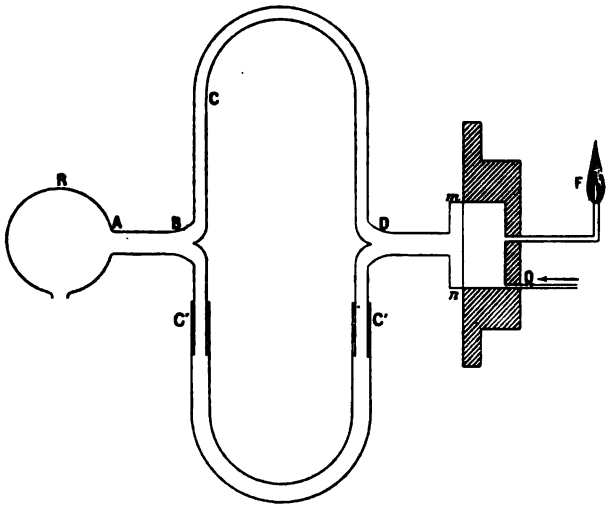
Expérience. — Pour réaliser l'interférence de deux ondes sonores, on utilise l'appareil de Kœnig. Un tuyau AB (*fig.* 48) se divise en deux branches BCD et BC'D réunies en B et D, et que l'on peut rendre inégales en tirant plus ou moins la coulisse C'.

La source sonore, constituée par un résonnateur de Helmholtz, excité par un diapason ou par un tuyau sonore, envoie dans les deux branches, deux ondes sonores de même période et d'amplitudes à peu près égales $a_1 = a_2$. A la sortie O, les mouvements vibratoires se superposent et l'on étudie la vibration résultante en mettant O en communication avec une capsule manométrique de Kœnig, petite

Digitized by Google

boîte fermée par une membrane de caoutchouc *mn*, où arrive par le tube Q du gaz d'éclairage qui alimente la flamme F.

Fig. 48.



Si *mn* vibre, la sortie du gaz cesse d'être uniforme, la hauteur de la flamme varie périodiquement et sa période est la même que celle du son résultant. On observe commodément ces oscillations de la flamme avec le miroir tournant.

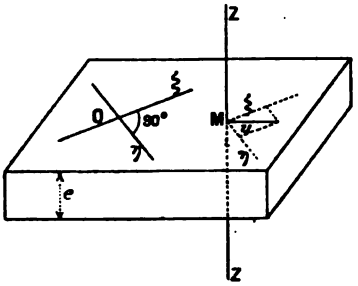
L'aspect de F dépend de la différence x des chemins BCD et BC'D; la flamme passe de l'immobilité à la vibration d'amplitude maximum si l'on déplace C'C' de façon à faire varier x de $\frac{\lambda}{2}$.

Cas des milieux bi-réfringents. — On verra plus tard (Cours d'optique de M. G. Lippmann) qu'une lame cristalline mince, rencontrée normalement par le rayon Z'Z, a une structure telle qu'elle ne peut transmettre que des vibrations rectilignes parallèles à deux directions fixes M_η, M_ξ, invaria-

Digitized by Google

blement liées au plan de la lame et perpendiculaires entre elles (*fig.* 49). De plus, ces vibrations se propagent avec des vitesses V_ξ, V_η différentes à travers le cristal et suivant

Fig. 49.



la même route. En pénétrant en M dans le cristal, la vibration $u = a \sin \omega t$ du rayon se dédoublera donc dans les deux vibrations $\xi = a \cos \alpha \sin \omega t$, $\eta = a \sin \alpha \sin \omega t$ suivant les directions M_ξ, M_η des vibrations qui peuvent être transmises par la lame.

Si e est la longueur de la route commune aux deux vibrations, la marche de ξ relative à la traversée de la lame *réduite au milieu* μ est

$$\delta_\xi = e n_\xi$$

en posant

$$n_\xi = \frac{V}{V_\xi}.$$

On aura de même pour η

$$\delta_\eta = e n_\eta,$$

en sorte que la différence de phase des deux mouvements rectangulaires ξ' et η' qui se composent en M′ à la sortie de la lame sera

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\delta_\eta - \delta_\xi) = \frac{2\pi e}{\lambda}(n_\eta - n_\xi),$$

Digitized by Google

λ étant la longueur d'onde de la vibration considérée dans le milieu μ.

On obtiendra donc, en substituant un plan d'onde au rayon, et à la sortie de la lame, un plan d'onde dans lequel la vibration sera une ellipse ou une variété d'ellipse selon la valeur de

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda}(n_\eta - n_\xi) \qquad (\textit{voir} \text{ p. } 125)$$

ou suivant la valeur de la différence de marche réduite

$$e(n_\eta - n_\xi).$$

Polarisation de l'onde émergente. — La lame n'interviendra pas si elle correspond à un nombre entier de longueurs d'onde

$$e(n_\eta - n_\xi) = \lambda \qquad \text{ou} \qquad k\lambda,$$

L'onde émergente est alors identique à l'onde incidente et sa vibration se produit comme u suivant la diagonale du rectangle

$$x = \pm a\cos\alpha, \qquad y = \pm a\sin\alpha$$

contenue dans l'angle $\xi O \eta$.

Si la lame correspond à une *demi-longueur d'onde*, on aura

$$e(n_\eta - n_\xi) = \frac{\lambda}{2} \qquad \text{ou} \qquad (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \pi \qquad \text{ou} \qquad (2k+1)\pi;$$

elle laisse la vibration émergente rectiligne, mais elle la fait tourner de manière à la diriger suivant la seconde diagonale du rectangle circonscrit.

Digitized by Google

Si la lame correspond à *un quart de longueur d'onde* $\frac{\lambda}{4}$ ou $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$ on a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

et la vibration émergente est elliptique; l'ellipse a d'ailleurs ses axes dirigés suivant les composantes transmises et ces axes ont pour demi-longueurs $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$.

Dans le cas particulier où $\sin\alpha = \cos\alpha$, c'est-à-dire pour $\alpha = 45°$, les deux axes de l'ellipse deviennent égaux : la vibration est alors circulaire.

Exercice. — *En se reportant aux résultats obtenus* (p. 131) *et les interprétant dans le langage de la différence de marche, on s'assurera que le sens de circulation sur l'ellipse est donnée par le Tableau suivant* :

$$0 < \delta < \frac{\lambda}{2}$$
$$\frac{\lambda}{2} < \delta < \lambda$$

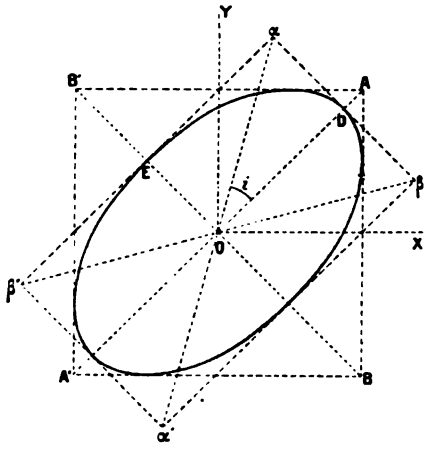
D'une manière générale, le premier sens de circulation amène $O\xi$ sur $O\eta$ par une rotation de 90° et le second sens amène $O\eta$ sur $O\xi$ par une rotation de 90°.

Restitution de la vibration rectiligne à partir de la vibration elliptique. — Une vibration elliptique étant donnée, on peut toujours la considérer comme engendrée par deux vibrations harmoniques rectilignes s'effectuant suivant les axes de l'ellipse. Mais alors la différence de phase des deux composantes est égale à $\frac{\pi}{2}$. Si donc on dispose sur le trajet de la vibration elliptique et parallèlement à son plan une

Digitized by Google

lame *quart d'onde*, dont les axes sont dirigés suivant les axes de l'ellipse, cette lame établira une nouvelle différence de phase $\frac{\pi}{2}$ additive ou soustractive et par suite la vibration rectiligne sera restituée suivant l'une des diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse.

Fig. 50.



Dans le cas particulier où l'ellipse primitive est inscrite dans un carré, c'est-à-dire provient de composantes initiales dirigées suivant les côtés du carré et de même amplitude a, les directions des axes sont indépendantes de φ, mais les longueurs des axes en dépendent; on a (p. 129)

$$\overline{OD}^2 = 2a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \qquad \overline{OE}^2 = 2a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2};$$

la vibration rectiligne restituée fait donc avec la direction fixe de l'axe OD (*fig.* 50) du quart d'onde un angle i tel que

$$\operatorname{tang} i = \frac{OE}{OD} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

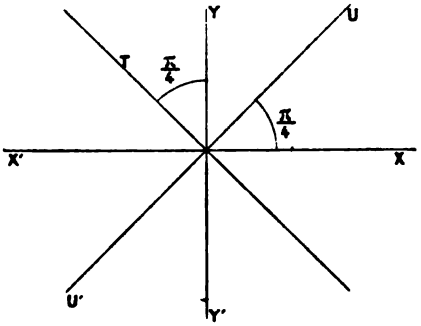
Digitized by Google

Si l'on sait mesurer i on aura par là même la valeur de φ.

Dans le cas où la vibration elliptique est produite par la propagation d'une vibration rectiligne à travers une lame cristalline, ou un milieu rendu biréfringent, d'épaisseur e, on a

$$\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda}(n_\eta - n_\xi),$$

Fig. 51.



et par suite on pourra calculer $n_\eta - n_\xi$ après avoir déterminé d'autre part λ et e. On pourra toujours se placer dans le cas particulier envisagé; il suffit en effet d'orienter la lame cristalline étudiée de façon que les directions de transmission des vibrations soient à 45° de la direction de la vibration rectiligne incidente (*fig.* 51).

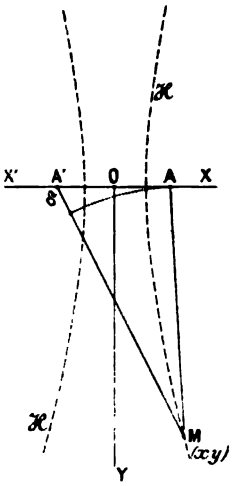
CALCUL DE LA DIFFÉRENCE DE MARCHE GÉOMÉTRIQUE DANS QUELQUES CAS.

Nous nous proposons de calculer pour elles-mêmes, et de grouper en un Tableau d'ensemble, des différences de marche dont la considération intervient dans un grand nombre de questions d'optique.

Digitized by Google

I. Cas de deux centres d'émission concordants. — Soient A et A′ (*fig.* 52) deux centres d'émission de vibrations pris sur l'axe X′X, à la même distance a de l'origine O, et M un point (x, y) du plan XOY.

Fig. 52.



Calculons la différence de marche $\delta = AM - A'M$ relative au point M, on a

$$\overline{AM}^2 = (x-a)^2 + y^2, \qquad \overline{A'M}^2 = (x+a)^2 + y^2,$$

donc

$$(1) \qquad \delta = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Le lieu des points M du plan qui présentent la différence de marche constante δ est une hyperbole ayant les points fixes A et A′ pour foyers dont l'équation est

$$(2) \qquad 4\delta^2 y^2 + 4(\delta^2 - 4a^2)x^2 + \delta^2(4a^2 - \delta^2) = 0.$$

En faisant tourner cette famille d'hyperboles autour

Digitized by Google

de X'X on aura la distribution des différences de marche dans l'espace. S'exercer à considérer l'espace comme *côté* au moyen de telles hyperboles obtenues en faisant varier δ suivant les termes d'une progression arithmétique.

On voit que la valeur de δ est toujours comprise entre o et $2a$.

Remarque. — En multipliant et divisant le second membre de l'équation (1) par l'expression conjuguée de ce second membre, il vient

$$\delta = \frac{-4ax}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \frac{-4ax}{MA+MA'}.$$

Dans le cas où le point M est dans le voisinage de OY et où l'angle AMA' est très petit, on peut confondre les distances MA et MA' avec y et écrire

$$(3) \qquad -\delta = \frac{4ax}{2y} = \frac{2ax}{y}.$$

Cela revient à substituer à l'équation (2) la suivante

$$\delta^2 y^2 - 4a^2x^2 = 0,$$

Exercice. — *Établir directement la relation approchée* (3) *en supposant que les deux rayons qui se coupent en* M(x, y) *se comportent comme s'ils se composaient à l'infini dans une direction* OM *faisant un petit angle* $\theta = \frac{x}{y}$ *avec* Oy.

II. Différence de marche entre des rayons parallèles issus de l'axe X'X et faisant avec OY l'angle θ dans le plan XOY (*fig.* 53). — Comparons les rayons issus de l'origine O et du point M d'abscisse x. Le triangle rec-

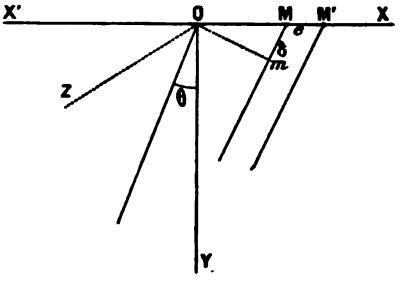
Digitized by Google

tangle OmM donne

$$\delta = x \sin\theta.$$

En passant du rayon M au rayon issu du point M′ d'abscisse $x + e$, la différence de marche varie de $e \sin\theta$ et la différence de phase de $\frac{2\pi e}{\lambda} \sin\theta$.

Fig. 53.



Si les centres actifs sont répartis sur X′X suivant les abscisses

$$0, \quad e, \quad 2e, \quad \ldots, \quad pe,$$

les phases relatives seront les termes de la progression arithmétique de raison $\frac{2\pi e}{\lambda} \sin\theta$.

Remarque. — En faisant subir à la figure une translation suivant la perpendiculaire OZ au plan XOY, rien ne change dans l'état relatif des rayons.

III. Différence de marche, en un point P de OY, des rayons issus de points M pris sur X′X. — On a (*fig.* 54)

$$\delta = \overline{MP} - \overline{PO} = \sqrt{b^2 + x^2} - b.$$

Si l'on élève en M (*fig.* 54) une ordonnée MQ égale à δ on

Digitized by Google

obtiendra, comme lieu des points Q définissant la distribution de la différence de marche, une hyperbole équilatère d'équation

$$\delta^2 - x^2 + 2b\delta = 0,$$

dont le centre est en P et les asymptotes parallèles aux bissectrices des axes.

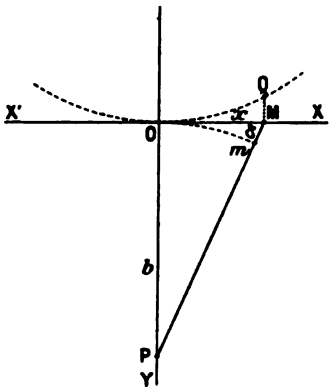
Pour la région voisine de O, définie par la condition que le rapport $\frac{x}{b} = \tang\alpha$ soit petit, on peut substituer à

$$\delta = b\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{b^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

l'expression

$$(1) \qquad (\delta) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{b}.$$

Fig. 54.



Remarques. — 1° En faisant tourner la figure autour de OY rien ne change dans l'état des vibrations qui passent en P.

2° *Zones.* — Si l'on spécifie sur la droite X'X les points M

Digitized by Google

tels que les chemins OP et PM aient pour mesure les termes de la progression arithmétique

$$b, \quad b+r, \quad b+2r, \quad \ldots, \quad b+pr,$$

on aura, pour la région où l'emploi de la formule (1) est légitime,

$$pr = \delta_p = \frac{1}{2}\frac{x_p^2}{b},$$

d'où la loi des rayons OM_p

$$x_p^2 = 2p\,br.$$

Pour $r = \frac{\lambda}{2}$,

$$x_p^2 = 2p\,b\frac{\lambda}{2}.$$

L'aire limitée par les deux circonférences de rayons x_p et x_{p+1} est donc

$$\pi(x_{p+1}^2 - x_p^2) = 2\pi\,br.$$

L'invariabilité de l'aire de la couronne tient à la diminution

$$x_{p+1} - x_p = \sqrt{2b}\,\frac{r}{\sqrt{(p+1)r} + \sqrt{pr}}$$

de sa largeur lorsque p croît.

IV. **Même problème que précédemment en substituant à la droite X'X une circonférence C de rayon** a. — Dans le triangle CMP (*fig.* 55), on a

$$\overline{MP}^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\cos\theta$$

et

$$\delta = \overline{MP} - b.$$

Dans le cas où l'on ne donne à θ que des valeurs telles

Digitized by Google

que $\cos\theta$ puisse être remplacé par $1 - \frac{\theta^2}{2}$, on a

$$\overline{MP}^2 = b^2 + a(a+b)\theta^2,$$

$$\overline{MP} - b = \frac{a(a+b)\theta^2}{\overline{MP} + b}$$

ou

$$\delta = \frac{a(a+b)}{b}\,\frac{\theta^2}{2};$$

or

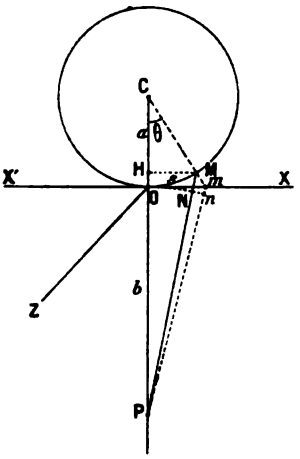
$$\text{arc}\,OM = s = a\theta,$$

donc

$$(1) \qquad \delta = \frac{a+b}{ab}\,\frac{s^2}{2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{s^2}{2}.$$

On peut faire tourner la figure autour de OY sans que δ

Fig. 55.



change, le cercle se transforme alors en sphère et le lieu des points M présentant en P la même différence de marche est la circonférence décrite par M.

Digitized by Google

La formule (1) devait être symétrique en a et b, car le calcul reste le même en permutant le rôle des points P et C.

Zones. — En considérant les points M distribués sur la circonférence pour lesquels les différences de marche sont o, r, ..., pr, on a pour de tels points

$$\delta_p = pr = \frac{a+b}{2ab} s_p^2 = k^2 \theta_p^2,$$

en posant

$$k^2 = \frac{(a+b)}{2b} a.$$

En conséquence

$$\theta_p^2 = \frac{1}{k^2} pr$$

et

$$\theta_{p+1}^2 = \frac{1}{k^2}(p+1)r.$$

La zone p, $p+1$ a pour surface

$$\Delta S = 2\pi a \times \text{hauteur de la zone.}$$

Comme $CH = a \cos\theta$, on peut écrire, avec l'approximation adoptée,

$$CH = a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right).$$

On a donc

$$CH_p = a\left(1 - \frac{\theta_p^2}{2}\right),$$

$$CH_{p+1} = a\left(1 - \frac{\theta_{p+1}^2}{2}\right),$$

et la hauteur de la zone a pour mesure

$$h = \overline{CH}_p - \overline{CH}_{p+1} = \frac{a}{2}(\theta_{p+1}^2 - \theta_p^2).$$

Digitized by Google

En conséquence

$$\Delta S_{p,p+1} = \pi a^2 (\theta_{p+1}^2 - \theta_p^2);$$

or

$$\theta_{p+1}^2 - \theta_p^2 = \frac{r}{k^2},$$

et, par suite,

$$\Delta S_{p,p+1} = \pi a^2 \frac{r}{k^2}.$$

Les zones définies par le système des points M_p tels que $\delta_p = pr$ (p entier, r constante) ont, au voisinage de O, des aires égales.

En faisant tendre a vers l'∞ on retrouve les résultats obtenus précédemment (III).

Comme $x = a \sin\theta$ ou $a\theta$, dans le cas actuel on peut écrire

$$x_p^2 = a^2 \theta_p^2 = k'^2 pr,$$

en posant

$$k'^2 = \frac{a^2}{k^2}.$$

Les carrés des rayons des circonférences engendrées par les points M sont entre eux comme la suite des nombres entiers.

Remarques. — 1° L'approximation adoptée plus haut conduit à prendre, pour la différence de marche $\delta = \overline{MN}$, la somme des deux chemins $\overline{Mm} + \overline{mn}$ définie comme l'indique la figure 55. En posant $Om = u$ on a

$$\overline{Mm} = \sqrt{a^2 + u^2} - a = \frac{u^2}{a + \sqrt{a^2 + u^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{u^2}{2a}.$$

De même

$$\overline{mn} = \sqrt{b^2 + u^2} - b \quad \text{ou} \quad \frac{u^2}{2b},$$

Digitized by Google

d'où

$$\overline{Mm} + \overline{mn} = \frac{u^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Si l'on fait tourner la figure autour de OY, m décrit une circonférence de rayon u dans le plan XOZ et l'on a

$$u^2 = x^2 + z^2$$

pour un point quelconque (x, z) de cette circonférence, par suite

$$\delta = \frac{x^2 + z^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

2° L'aire dS d'une zone de hauteur infiniment petite a pour expression, au degré d'approximation adopté,

$$2\pi s\, ds,$$

ou encore

$$dS = \pi \frac{ab}{a+b} d\delta,$$

$d\delta$ étant la différence de marche relative aux deux circonférences qui limitent la zone élémentaire considérée.

On a en effet

$$\delta = \frac{a(a+b)}{b}\theta^2,$$

donc

$$d\delta = \frac{2a(a+b)}{b}\theta\, d\theta;$$

or

$$dS = 2\pi a\, dh = 2\pi a\, a\theta\, d\theta,$$

donc

$$dS = \frac{\pi ab}{a+b} d\delta.$$

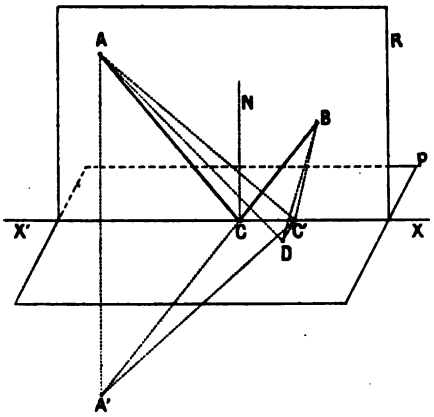
3° La translation de la circonférence suivant OZ engendrerait une surface cylindrique à laquelle s'appliquent des considérations analogues aux précédentes.

Digitized by Google

Différences de marche relatives aux rayons qui coïncident avec une route de Fermat. — Nous n'examinerons ici que les cas les plus simples.

I. *Un mobile se déplaçant d'un mouvement uniforme avec la vitesse* V, *mettra le moins de temps possible pour se rendre de* A *en* B (*fig.* 56) *en touchant le plan* P, *s'il touche* P *en*

Fig. 56.



un point C *tel que le plan* ACB *soit perpendiculaire à* P *et s'il suit de plus le chemin formé par les deux droites* AC *et* BC *également inclinées sur le plan* P *ou, ce qui revient au même, sur la normale* CN *à ce plan.*

Remarquons tout d'abord que les lignes droites AC et BC sont plus courtes que toute ligne courbe ou brisée joignant les mêmes points; la trajectoire cherchée est donc composée de deux portions de lignes droites.

Menons par AB un plan R perpendiculaire à P et soit C, un point de l'intersection X'X des deux plans. La route AC'B est plus courte que toute autre route obtenue en déplaçant C' dans le plan P, en D par exemple, suivant une per-

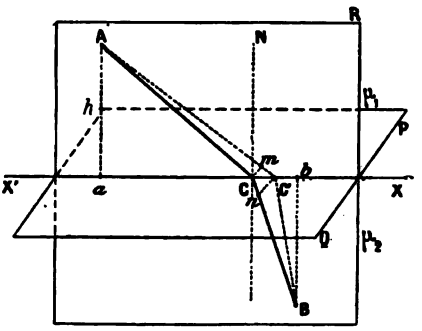
Digitized by Google

pendiculaire à X'X, car les perpendiculaires AC' et C'B à C'D sont alors remplacées par les obliques AD et BD à la même droite. Il faut donc choisir le chemin le plus court dans le plan R. Soit A' le symétrique de A par rapport au plan P, la droite BA' détermine le point C cherché. En effet, si l'on déplace C en C' le chemin AC + CB qui a même longueur que la ligne droite BA' se trouve remplacé par le chemin AC' + C'B, égal à la ligne brisée BC' + C'A', et par suite plus grand que BA'.

ACB est la route de Fermat par réflexion sur P.

II. Si le plan P sépare deux milieux μ_1, μ_2 dans lesquels le mobile se déplace avec des vitesses différentes V et V', c'est encore un chemin AC'B (*fig.* 57) contenu dans le

Fig. 57.



plan R perpendiculaire à P qui répondra au parcours de durée minimum et pour la même raison que plus haut.

Reste donc seulement à déterminer C sur X'X. On a pour la durée τ du parcours AC'B

$$\tau = \frac{AC'}{V} + \frac{C'B}{V'}.$$

Digitized by Google

Or

$$AC' = \frac{Aa \text{ ou } h}{\cos i}, \qquad C'B = \frac{Bb \text{ ou } k}{\cos r},$$

donc

$$\tau = \frac{h}{V \cos i} + \frac{k}{V' \cos r}.$$

Pour que $d\tau$ soit minimum, il faut que

$$\frac{hV \sin i\, di}{\cos^2 i} + \frac{kV' \sin r\, dr}{\cos^2 r} = 0.$$

Or la projection de AB sur X'X étant indépendante du chemin AC'B, on a

$$h \operatorname{tang} i + k \operatorname{tang} r = \text{const.},$$

ou

$$\frac{h\, di}{\cos^2 i} + \frac{k\, dr}{\cos^2 r} = 0.$$

En égalant les valeurs de l'expression $\frac{h}{k} \frac{\cos^2 r}{\cos^2 i} \frac{di}{dr}$ tirées des relations (1) et (2) il vient

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n.$$

Le point C *est donc tel que les sinus des angles i et r, que forment* AC *et* CB *dans le plan* R *avec la normale en* C *à la surface* P, *soient dans le rapport des vitesses de propagation dans les milieux* μ_1 *et* μ_2.

ACB est la route de Fermat *par réfraction* entre μ_1 et μ_2. Le sens de propagation du mobile n'intervient pas dans cette analyse.

Remarque. — On obtiendrait immédiatement les résultats I et II en écrivant que pour un chemin AC'B voisin de ACB il y a compensation, au second ordre près, entre

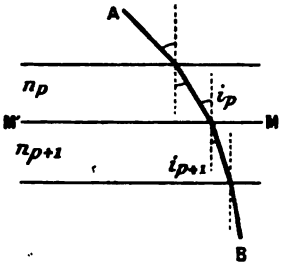
Digitized by Google

l'allongement de l'une des portions du chemin et la diminution de l'autre.

C'est vers 1639 que Fermat a appelé l'attention sur les parcours tels que ACB effectués dans un temps minimum.

Route de Fermat à travers une série de milieux séparés par des plans parallèles. — La traversée de la surface MM'

Fig. 58.



(*fig.* 58) substituera à l'angle i_p avec la normale à MM' l'angle i_{p+1} et l'on aura

$$\frac{\sin i_p}{\sin i_{p+1}} = \frac{V_p}{V_{p+1}} = \frac{V}{V_{p+1}} : \frac{V}{V_p} = \frac{n_{p+1}}{n_p}$$

ou encore

$$n_p \sin i_p = \text{const.}$$

Dans le cas où la vitesse V_p varie d'une manière continue, et est fonction de sa distance z à un plan fixe P, la route suivie est une courbe que l'on déterminera en écrivant :

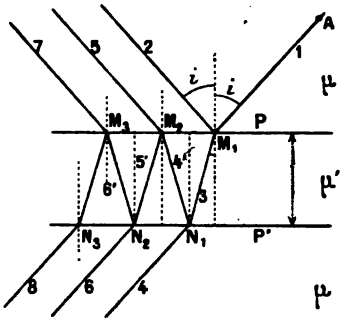
1° Que le produit $n \sin i$ a la même valeur en tous les points M de la courbe; i est l'angle que forme la tangente en M à la courbe avec la perpendiculaire au plan P passant par M;

2° Ou qu'entre les points extrêmes A et B l'intégrale $\int_A^B n ds$ calculée le long de la courbe, est un minimum.

Digitized by Google

Route de Fermat comportant des réflexions et des réfractions. — Parti de A (*fig.* 59), suivant le chemin 1 dans le milieu μ, le mobile peut revenir dans le milieu μ, suivant 2 *par réflexion* en M_1, ou pénétrer dans le milieu μ' suivant 3 *par réfraction* au même point M_1. En associant au plan P

Fig. 59.



un second plan P′ parallèle à P limitant le milieu μ', le mobile pourra sortir en N_1 par réfraction ou revenir suivant 4′ dans le milieu μ', etc. On est ainsi conduit à tracer des routes de Fermat comportant deux réfractions et un nombre pair ou impair de réflexions intermédiaires.

I. **Différence de marche imprimée au rayon par l'interposition d'une lame d'épaisseur** *e*. — Considérons le rayon RM*m* (*fig.* 60) porté par la lame L en RMM′R′; au parcours MM′ dans le milieu μ' correspond le parcours équivalent *n*MM′ dans le milieu μ. La différence de marche à calculer est donc

$$\delta = n\overline{MM'} - \overline{Mm},$$

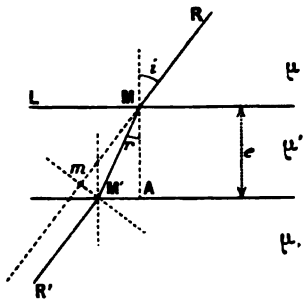
le point *m* étant la projection de M′ sur la direction RM du rayon donné.

Digitized by Google

Comme les triangles rectangles MmM', MAM' donnent respectivement

$$Mm = MM' \cos(i - r), \qquad MM' = \frac{e}{\cos r},$$

Fig. 60.



on peut écrire

$$\delta = \frac{e}{\cos r}[n - \cos(i - r)] = e(n \cos r - \cos i)$$

ou encore

$$\delta = e(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i),$$

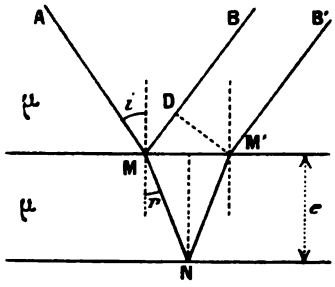
en fonction de l'inclinaison i du rayon sur la normale MN à la lame.

Exercice. — *On coupe une lame en deux parties et l'on fait tourner le plan de l'une des parties de façon qu'il fasse avec le plan de l'autre l'angle α. On reçoit sur ce système des rayons normaux au plan bissecteur de l'angle α. En faisant tourner le système d'un angle β, que l'on supposera petit, quelle différence de marche présenteront les rayons qui ont traversé respectivement chacune des portions de la lame?*

Digitized by Google

II. Différence de marche δ relative aux deux parcours AMB (réflexion en M) et AMNM'B' (réfraction en M, réflexion en N) et pour une lame homogène d'épaisseur uniforme e (*fig.* 61). — C'est à partir du point M que les deux

Fig. 61.



parcours se différencient : l'une des vibrations continue son trajet dans le premier milieu suivant MB, alors que l'autre vibration suit dans la lame le chemin MNM'. Par définition $\delta = n\,(\mathrm{MN} + \mathrm{NM'}) - \mathrm{MD}$.

Des triangles rectangles visibles sur la figure, on tire

$$\mathrm{MN} = \frac{e}{\cos r}, \qquad \mathrm{MM'} = 2e \tan r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{MD} = \mathrm{MM'} \sin i.$$

En conséquence

$$\delta = \frac{2en}{\cos r} - 2e \tan r \sin i,$$

$$\delta = \frac{2en}{\cos r} - 2en \frac{\sin^2 r}{\cos r} = 2en \cos r.$$

III. Si l'on suit les parcours plus compliqués (1) et (2) définis (*fig.* 62), on voit qu'ils présentent la différence de marche

$$\delta = \mathrm{M'}m' + 2n\mathrm{MP} - \mathrm{M'}m - 2n\mathrm{M'Q}.$$

Digitized by Google

On a

$$M'm = MM' \sin i,$$

puis

$$MM' = 2\,MP \sin r$$

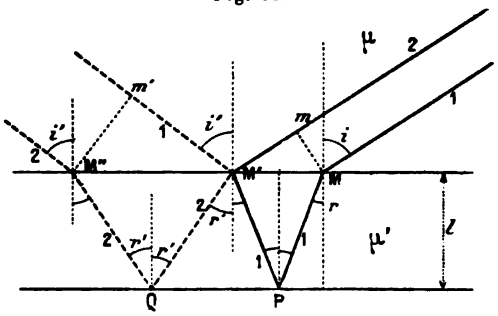
et

$$MP = \frac{e}{\cos r},$$

d'où

$$M'm = 2e\frac{\sin r}{\cos r}\sin i = \frac{2ne}{\cos r}\sin^2 r.$$

Fig. 62.



En suivant en sens inverse le parcours (2), on a de même

$$M'Q = \frac{e}{\cos r'},$$

$$M'm' = \frac{2e}{\cos r'}\sin r' \sin i' = \frac{2ne}{\cos r'}\sin^2 r'.$$

En substituant ces résultats dans l'expression de δ, il vient après simplification

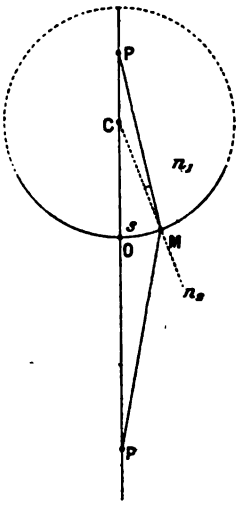
$$\delta_{2,1} = 2ne(\cos r - \cos r').$$

Exercice. — *Trouver la raison de la progression relative à la différence de marche :* 1° *du groupe de rayons* 2, 5, 7, ...; 2° *du groupe des rayons* 4, 6, 8, ... (*fig.* 59).

Digitized by Google

Chemins équivalents à travers un système de milieux séparés par des surfaces sphériques dont les centres sont sur une même ligne droite. — En passant du rayon PO

Fig. 63.



(*fig.* 63) au rayon voisin PM tel que arc OM $= s$, le chemin PO s'accroît de

$$\delta = \left(\frac{1}{PO} + \frac{1}{CM}\right)\frac{s^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad \delta = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right)\frac{s^2}{2},$$

en posant

$$PO = p, \qquad OC = R.$$

En répétant le même calcul pour P′, point placé à l'intérieur de la circonférence, on trouve qu'en passant de P′O à P′M le chemin diminue de

$$\delta' = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'}\right)\frac{s^2}{2}.$$

Si n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux séparés par

Digitized by Google

la surface sphérique, les chemins équivalents à δ et δ', supposés suivis dans le milieu μ, sont

$$n_1\delta = n_1\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right)\frac{s^2}{2},$$

$$n_2\delta' = n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'}\right)\frac{s^2}{2}.$$

Pour qu'il y ait compensation au voisinage de O, il faut donc que

$$n_1\delta - n_2\delta' = 0,$$

c'est-à-dire

$$n_1\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) - n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p'}\right) = 0$$

ou

$$(1) \qquad \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Cette relation exprime que les rayons de Fermat issus de P et réfractés au voisinage de O vont se couper au point P′ de l'axe. Il ne s'établit donc pas de différence de marche entre les points P et P′ déterminés par (1) (foyers conjugués) pour les différents rayons issus de P qui se réfractent au voisinage de O, pôle de P.

On peut, par suite, au point de vue du calcul de la différence de marche, considérer les parcours des rayons issus de P comme originaires de P′ ou réciproquement.

La généralisation pour des réfractions successives à travers des surfaces sphériques centrées sur PC est immédiate.

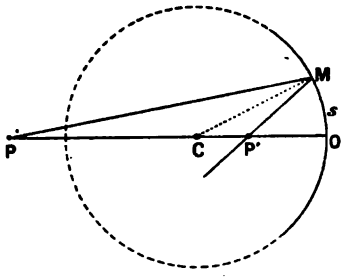
Remarques. — 1° Si les deux milieux sont séparés par une surface plane, la condition d'équivalence se réduit à

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = 0.$$

Digitized by Google

2° Pour que la route par réflexion PMP′ (*fig.* 64) soit équivalente à POP′, la surface OM étant sphérique, il faut

Fig. 64.



qu'il y ait égalité entre la diminution de chemin

$$\delta = PM - PO = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p}\right)\frac{s^2}{2}$$

et l'augmentation

$$\delta' = P'M - P'O = \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{R}\right)\frac{s^2}{2};$$

d'où la condition

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R},$$

qui exprime que les points P et P′ sont conjugués par réflexion pour les rayons voisins de O. Aucun retard entre les différents rayons du faisceau P P′ ne s'établit dans le parcours entre P et P′.

Pour une surface plane (R; ∞) la condition se réduit à $p + p' = 0$.

Il importe de remarquer que la *même formule*, établie page 175, détermine à la fois les lois des foyers conjugués par *diffraction*, par *réfraction* et par *réflexion*.

Digitized by Google

RETOUR A LA COMPOSITION DES VIBRATIONS. ROLE DE LA DIFFÉRENCE DE MARCHE.

Si l'on excepte les modifications de phase qui proviennent de phénomènes physiques : réflexion des vibrations, passage par un foyer, etc., c'est toujours aux différences de marche provenant de parcours *non équivalents* que sont dues les différences de phase entre les vibrations qui se composent dans l'espace.

Appliquons les règles établies au Chapitre précédent à quelques exemples choisis de façon à mettre en évidence les divers aspects du problème.

1. Les vibrations proviennent de deux centres d'émission. — On a vu (p. 170) que les interférences se produisent alors sur des hyperboloïdes de révolution ayant pour foyers les deux centres d'émission et (p. 162) qu'un même hyperboloïde déterminé par la valeur

$$\delta_1 = (2k_1 + 1)\frac{\lambda}{2}$$

convient non seulement à la vibration de longueur d'onde λ, mais encore à toutes celles dont les longueurs d'onde λ' sont telles que le rapport

$$u = \frac{2\delta_1}{\lambda'}$$

est égal à un nombre entier impair.

Pour une autre différence de marche

$$\delta_2 = (2k_2 + 1)\frac{\lambda}{2},$$

Digitized by Google

l'hyperbole définie par δ_2 conviendra aux vibrations λ'' qui satisfont à la condition

$$v = \frac{2\delta_2}{\lambda''} = \text{nombre impair.}$$

Le groupe des longueurs d'onde à associer à la valeur λ qui définit le système des hyperboles d'interférence, subdivisant l'espace à la manière des *surfaces de niveau*, change donc avec l'hyperbole considérée. Coïncidences de max. et de min.

Exercice. — *Qu'arrive-t-il lorsque λ et λ' sont dans le rapport de deux nombres premiers p et q ?*

Remarque. — Une différence de marche peut toujours être mesurée en longueurs d'onde, alors

$$\delta = m\lambda,$$

m étant un nombre entier ou une fraction quelconque.

Pour les hyperboloïdes d'interférence on a

$$m = k + \frac{1}{2},$$

k étant un nombre entier et pour les hyperboloïdes correspondant à une amplitude résultante maximum

$$m = k.$$

On comparera les différents points de l'hyperboloïde au point de vue de leur *phase* de mouvement.

Remarque. — Dans le cas où la différence de marche a pour expression

$$\delta = \frac{2ax}{y},$$

Digitized by Google

il y aura interférence aux points (x, y) tels que

$$\frac{2ax}{y} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Sur la droite $y = D$, ces points sont distribués suivant la loi

$$x = (2k+1)\frac{D\lambda}{4a};$$

par suite, la distance ε de deux points homologues consécutifs est

$$\varepsilon = \frac{D}{2a}\lambda.$$

L'écart de deux points d'interférence est alors proportionnel : 1° à la distance à laquelle s'opère la composition des vibrations; 2° à la longueur d'onde de la vibration propagée, et 3° en raison inverse de la distance des deux centres d'émission.

II. Les centres d'émission en nombre infini sont distribués le long d'une ligne droite et la totalisation s'opère dans une direction donnée. — Décomposons X'X (voir *fig.* 53) en petits éléments ε et admettons que ces éléments envoient chacun, dans la direction θ, une vibration d'amplitude $b\varepsilon$, b étant une constante. Ces vibrations étant supposées parallèles et totalisées, quelle sera l'amplitude de la vibration résultante ?

On a à composer des vibrations parallèles de même amplitude et dont les phases varient en progression arithmétique (p. 103 et 106).

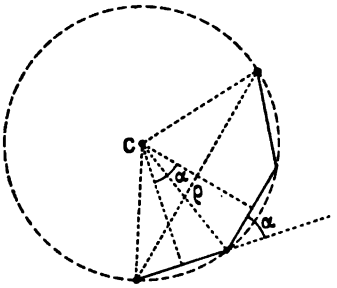
Chacun des côtés c du polygone à construire est égal à $b\varepsilon$ et fait avec le côté voisin l'angle $\alpha = \frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}\sin\theta$.

Digitized by Google

Le rayon ρ du cercle circonscrit à la figure polygonale régulière obtenue (*fig.* 65) a pour expression $\rho = \frac{c}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

Si l'on prend l'élément ε de plus en plus petit leur nombre

Fig. 65.

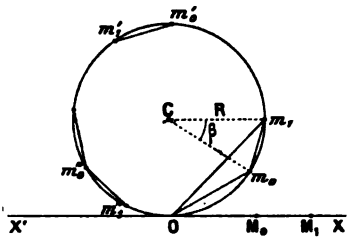


augmentera indéfiniment et ρ tendra vers la même limite que $\frac{c}{\alpha}$, à savoir $\frac{b}{\pi \sin \theta} \frac{\lambda}{2}$.

Le polygone des vibrations se transforme donc, pour X′X, en une circonférence C de rayon $R = \frac{b}{\pi \sin \theta} \frac{\lambda}{2}$.

Si le segment $OM_0 = x_0$ de X′X est seul utilisé (*fig.* 66), il

Fig. 66.



faudra porter sur cette circonférence C à partir de O, et dans le sens convenable, un arc de longueur $b x_0$ dont l'extrémité tombera en m_0; la corde $O m_0$ représente l'amplitude de la

Digitized by Google

vibration résultante cherchée. Pour le segment $OM_1 = x_1$, ce serait la corde Om_1, et pour le segment M_0M_1 la corde $\overline{m_0m_1}$, différence géométrique des cordes $\overline{Om_1}$ et $\overline{Om_0}$.

Posons $\overline{m_0m_1} = c'$. Si β est l'angle au centre sous-tendu par m_0m_1 on a

$$c' = 2R \sin \frac{\beta}{2}.$$

En remarquant que

$$\beta = \frac{\text{arc}\, m_0m_1}{R} = \frac{b(x_1 - x_0)}{R},$$

il vient

$$c' = 2R \sin \frac{b(x_1 - x_0)}{2R} = 2R \sin \frac{ba}{2R},$$

en posant $x_1 - x_0 = a$.

En remplaçant R par sa valeur, il vient enfin

$$c' = ab \times \frac{\sin\left(\frac{a\pi \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{a\pi \sin\theta}{\lambda}}.$$

III. Les centres d'émission appartiennent à des segments de la droite X'X égaux et régulièrement espacés. — En faisant subir successivement au segment M_0M_1 la translation e, ce segment viendra occuper, sur X'X, n positions que l'on considère comme seules efficaces. Quelle sera la résultante des vibrations parallèles envoyées dans la direction θ par ces n segments ?

A la translation e de M_0M_1 le long de OX correspond dans la circonférence C (*fig.* 65) une rotation de la corde m_0m_1 telle que les arcs décrits par m_0 et m_1 sont égaux à be; l'angle γ dont tourne la corde m_0m_1 à chaque translation a

Digitized by Google

donc pour mesure

$$\gamma = \frac{be}{R} = 2\pi e \frac{\sin\theta}{\lambda}.$$

Si l'on construit une ligne polygonale, dont les côtés soient égaux et parallèles aux n cordes c' qui répondent aux n translations, le dernier côté fera avec le premier l'angle $n\gamma$, et la résultante $\mathcal{A}$ de cette ligne polygonale sera vue du centre de la circonférence circonscrite à la ligne polygonale sous l'angle $n\gamma$. Soit R′ le rayon de cette circonférence. On a

$$R' = \frac{c'}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$$

et

$$\mathcal{A} = 2R'\sin\frac{n\gamma}{2};$$

d'où, en remplaçant c', γ et R′ par leurs valeurs :

$$\mathcal{A} = ab\frac{\sin\frac{a\pi\sin\theta}{\lambda}}{\frac{a\pi\sin\theta}{\lambda}}\frac{\sin\frac{n\pi e\sin\theta}{\lambda}}{\sin\frac{\pi e\sin\theta}{\lambda}}.$$

On discutera ce résultat.

Remarque. — R′ sera infini, et la circonférence sera remplacée par une ligne droite si l'on a

$$\sin\frac{\gamma}{2} = 0,$$

alors $\frac{\gamma}{2} = k\pi$ et par suite $\sin\theta = k\frac{\lambda}{e}$ (k entier). Dans de telles conditions la rotation γ de la corde fait reprendre à celle-ci sa position initiale, et dans la construction de Fresnel ces cordes c' viennent se placer bout à bout et

Digitized by Google

donner le segment de droite

$$(\mathcal{A}) = nc' = nab\frac{\sin\frac{ka\pi}{e}}{\frac{ka\pi}{e}}.$$

IV. Les centres d'émission sont répartis sur une circonférence et la totalisation s'opère en un point. — En supposant que les divers éléments ds de la circonférence C (voir *fig.* 54) envoient en P des vibrations parallèles d'amplitude kds, quelle serait l'amplitude de la résultante de ces vibrations ?

Pour résoudre ce problème il faut composer des vibrations parallèles de même amplitude $k\,ds$, la vibration issue de l'élément défini en position par l'arc s présentant avec celle issue du pôle O la différence de phase

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{s^2}{2}.$$

L'une quelconque des vibrations à composer peut s'écrire

$$\begin{aligned} du &= k\,ds\sin(\omega t+\alpha-\varphi) \\ &= k\,ds\cos\varphi\sin(\omega t+\alpha) - k\,ds\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha). \end{aligned}$$

En faisant la somme des déplacements du, après avoir mis $\sin(\omega t+\alpha)$ et $\cos(\omega t+\alpha)$ en facteur, c'est-à-dire à l'instant t, il vient

$$\begin{aligned} u = \int du = \quad & \sin(\omega t+\alpha)k\int_{s_0}^{s_1}\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)s^2\,ds \\ & - \cos(\omega t+\alpha)k\int_{s_0}^{s_1}\sin\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)s^2\,ds. \end{aligned}$$

Les sommes obtenues (p. 105) sont ici remplacées par des intégrales en raison de la continuité de la variation des phases des vibrations parallèles à composer.

Digitized by Google

Si l'on pose

$$\mathfrak{I}_1 = \int_{s_0}^{s_1} \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds, \qquad \mathfrak{I}_2 = \int_{s_0}^{s_1} \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds,$$

il vient

$$u = k\mathfrak{I}_2 \sin(\omega t + \alpha) + k\mathfrak{I}_1 \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

La formule

$$\mathfrak{A}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2) \qquad \text{(p. 95)}$$

donne donc, pour l'amplitude $\mathfrak{A}$ de la vibration u,

$$\mathfrak{A}^2 = k^2(\mathfrak{I}_1^2 + \mathfrak{I}_2^2).$$

Intégrales de Fresnel. — Les intégrales indéfinies aux quelles nous a conduit la règle de Fresnel, dans le problème précédent, à savoir

$$\int \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds, \qquad \int \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds,$$

dépendent des conditions particulières au problème traité parce que a, b et λ figurent sous le signe $\int$. Mais la forme des expressions à intégrer est telle qu'il est facile, par un changement de variable, de faire sortir du signe $\int$ tout ce qui intéresse le cas considéré. Si l'on pose en effet

$$(1) \qquad \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2 = \frac{\pi}{2} v^2,$$

il vient

$$s = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}; \qquad ds = dv\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}.$$

Digitized by Google

En sorte que

$$\int \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}} \int \sin \frac{\pi}{2} v^2\, dv,$$

$$\int \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\, ds = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}} \int \cos \frac{\pi}{2} v^2\, dv.$$

Pour effectuer le calcul de $\mathcal{A}$ dans des conditions bien déterminées, il faudra :

1° Calculer l'expression

$$P = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}};$$

2° Déterminer les limites v_0 et v_1 qui correspondent à s_0 et s_1 par la formule

$$s = P v;$$

3° Calculer les intégrales

$$X_1 = \int_{v_0}^{v_1} \sin \frac{\pi}{2} v^2\, dv, \qquad Y_1 = \int_{v_0}^{v_1} \cos \frac{\pi}{2} v^2\, dv;$$

4° Calculer $\mathcal{A}$ à l'aide de la formule

$$\mathcal{A}^2 = k^2 \frac{ab\lambda}{2(a+b)} (X_1^2 + Y_1^2).$$

Table d'intégrales de Fresnel. — Il est avantageux de disposer de Tables donnant les valeurs des intégrales définies

$$X = \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} v^2\, dv, \qquad Y = \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} v^2\, dv,$$

pour des valeurs de v variant par degrés convenables de zéro à l'infini.

Digitized by Google

Représentation de la Table des intégrales de Fresnel par une courbe. — En posant

$$X_1^2 + Y_1^2 = U^2,$$

il vient

$$\mathcal{A}^2 = k^2 \frac{ab\lambda}{2(a+b)} U^2$$

ou

$$\mathcal{A} = k\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\, U.$$

L'amplitude $\mathcal{A}$ varie donc proportionnellement à U, hypoténuse du triangle rectangle ayant X_1 et Y_1 pour côtés.

Cette remarque a conduit Cornu à représenter la Table des intégrales de Fresnel par une courbe particulièrement suggestive en ce qui concerne les variations relatives de $\mathcal{A}$ lorsque les conditions du problème changent d'une manière continue. Il suffit pour cela de construire la courbe dont les points M ont respectivement pour coordonnées rectangulaires les valeurs X et Y de la Table qui correspondent à la même limite v. En traçant une ligne continue passant par les points M directement construits, on obtient la courbe représentée (*fig.* 66).

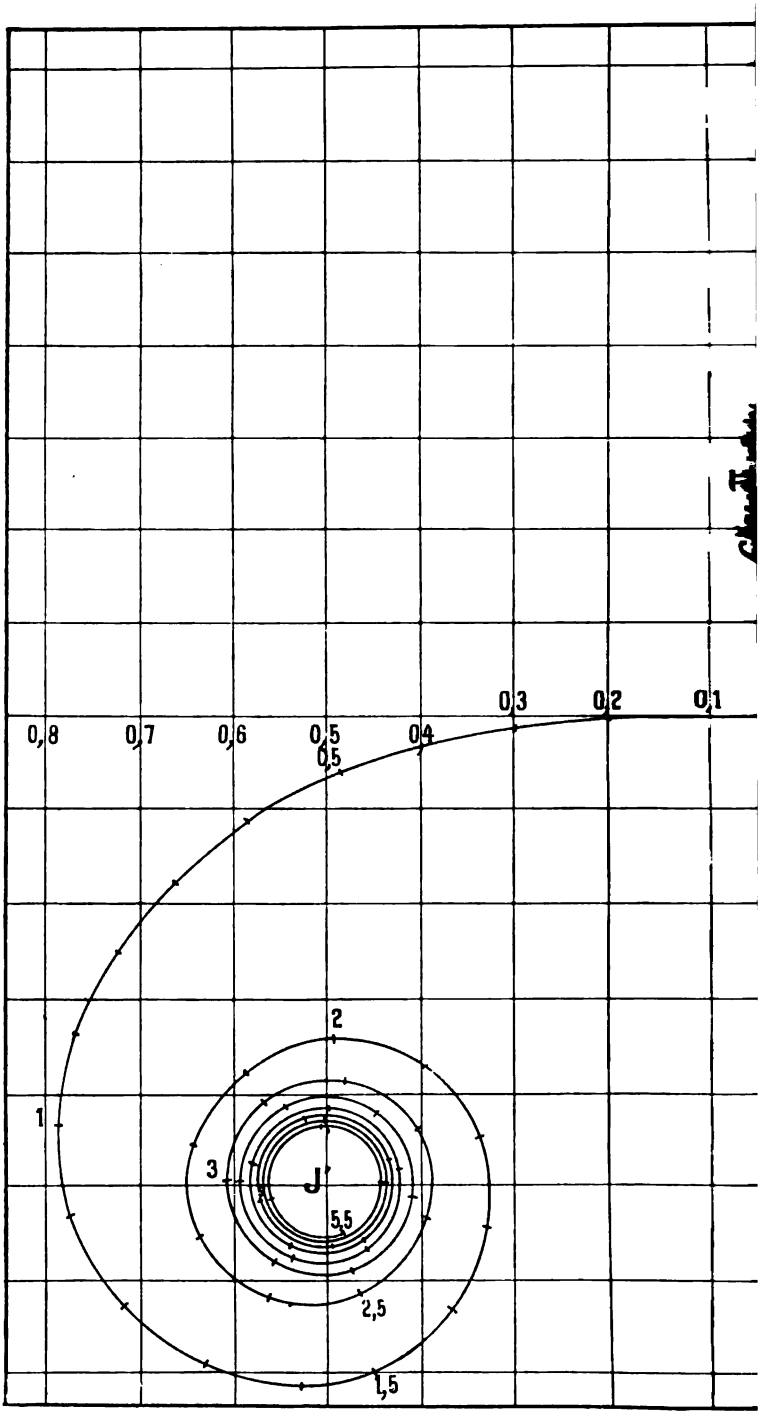
On voit que U est le module de l'intégrale

$$\int e^{i\frac{\pi}{2}v^2}\, dv.$$

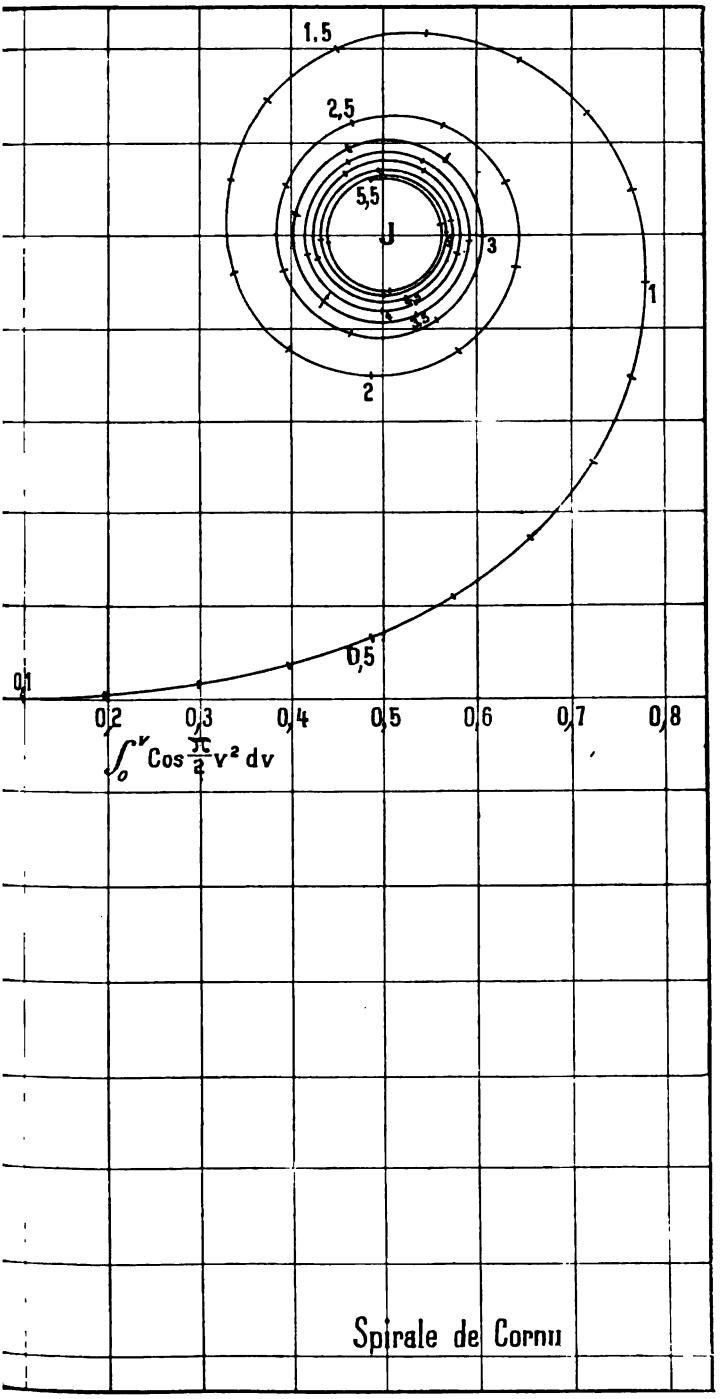
V. Les éléments d'émission appartiennent à une surface sphérique. — Soit s la mesure de l'arc qui définit un élément d'émission d'aire dS. On a à composer en P des *vibrations parallèles* ayant l'amplitude $k\,dS$ et une phase relative φ à l'arrivée en P telle que

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{a+b}{ab}s^2.$$

Digitized by Google



Digitized by Google



Spirale de Cornu

Digitized by Google

Le déplacement élémentaire du en P ayant pour expression

$$\begin{aligned} du &= k\,d\mathrm{S}\sin(\omega t + \alpha - \varphi) \\ &= \sin(\omega t + \alpha)\,k\,d\mathrm{S}\cos\varphi - \cos(\omega t + \alpha)\,k\,d\mathrm{S}\sin\varphi, \end{aligned}$$

le déplacement total, à l'instant t, a pour mesure

$$u = \sin(\omega t + \alpha)\int_\Sigma k\cos\varphi\,d\mathrm{S} - \cos(\omega t + \alpha)\int_\Sigma k\sin\varphi\,d\mathrm{S},$$

les intégrales étant étendues à l'aire active de la surface sphérique.

L'amplitude $\mathcal{A}$ du mouvement sinusoïdal résultant est alors donné par la formule

$$\mathcal{A}^2 = k^2(\mathrm{I}_1^2 + \mathrm{I}_2^2),$$

si l'on pose

$$\mathrm{I}_1 = \int_\Sigma \cos\varphi\,d\mathrm{S}, \qquad \mathrm{I}_2 = \int_\Sigma \sin\varphi\,d\mathrm{S}.$$

1° *Cas où le calcul des intégrales* I_1 *et* I_2 *se ramène aux intégrales de Fresnel.* — En prenant φ sous la forme

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{a+b}{ab}(x^2 + y^2)$$

et pour l'élément d'aire $d\mathrm{S}$ le produit $dx\,dy$, ce qui correspond à des conditions dont nous avons indiqué le degré d'approximation, il vient

$$\mathrm{I}_1 = \int\int_\Sigma \cos\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{a+b}{ab}(x^2 + y^2)\,dx\,dy;$$

$$\mathrm{I}_2 = \int\int_\Sigma \sin\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{a+b}{ab}(x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Développant cos et sin sous le signe $\int\int$, profitant de la séparation des variables et admettant l'indépendance de y

Digitized by Google

et de x, puis posant

$$C_1 = \int_{x_1}^{x_2} \cos\frac{\pi}{\lambda}\frac{a+b}{ab}x^2\,dx$$
$$= \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\int_{v_1}^{v_2}\cos\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\,Y_1,$$
$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \sin\frac{\pi}{\lambda}\frac{a+b}{ab}x^2\,dx$$
$$= \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\int_{v_1}^{v_2}\sin\frac{\pi}{2}v^2\,dv = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\,X_1,$$

et de même

$$C_2 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\,Y_2, \qquad S_2 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\,X_2,$$

il vient

$$I_1 = C_1C_2 - S_1S_2, \qquad I_2 = S_1C_2 + C_1S_2,$$

ou encore

$$I_1 = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}(Y_1Y_2 - X_1X_2), \quad I_2 = \frac{ab\lambda}{2(a+b)}(X_1Y_2 + Y_1X_2),$$

d'où

$$\mathcal{A}^2 = k^2\frac{a^2b^2\lambda^2}{4(a+b)^2}(Y_1^2Y_2^2 + X_1^2X_2^2 + X_1^2Y_2^2 + Y_1^2X_2^2).$$

Il résulte de ce Tableau que l'amplitude $\mathcal{A}$ se calcule encore au moyen des *intégrales de Fresnel* lorsque les limites x_1, x_2; y_1, y_2 *peuvent être séparément explicitées.*

2° *Cas où l'aire* Σ *est de révolution autour de* CP. — Le calcul de $\mathcal{A}$ est alors immédiat, car on peut prendre dans ce cas, pour l'élément d'aire dS, la zone définie par les arcs s et $s + ds$. Comme cette zone, au degré d'approximation adopté, a pour mesure $2\pi s\,ds$, les intégrales à calculer sont

Digitized by Google

de la forme

$$J_1 = \int \sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2 s\, ds, \qquad J_2 = \int \cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2 s\, ds.$$

Par suite

$$J_1 = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{ab}{a+b} \cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2, \qquad J_2 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{ab}{a+b} \sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2$$

et

$$\mathcal{A}^2 = 4k^2 \frac{\lambda^2 a^2 b^2}{(a+b)^2} \left[\left(\sin \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2 \right)^2_{s_0, s_1} + \left(\cos \frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab} s^2 \right)^2_{s_0, s_1} \right].$$

VI. Les différents points d'un plan XOY envoient des mouvements vibratoires dans la direction α, β, γ. — L'élément de surface dS situé en M (*fig.* 67) envoie dans la direction considérée l'élongation

$$du = dS \sin(\omega t - \varphi),$$

φ est la différence de phase entre la vibration issue de l'élément O et celle émise par M.

Si δ est la distance de O au plan Q mené par M perpendiculairement à la direction α, β, γ, on a

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

Les coordonnées de M sont $(x, y, 0)$; le plan Q a pour équation

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma Z = 0$$

et, par suite,

$$\delta = \alpha x + \beta y.$$

Si $dS = dx\, dy$,

$$du = \sin \left[\omega t - \frac{2\pi(\alpha x + \beta y)}{\lambda} \right] dx\, dy.$$

Pour une aire S prise dans le plan des XY, le mouvement

Digitized by Google

résultant a pour loi

$$U = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

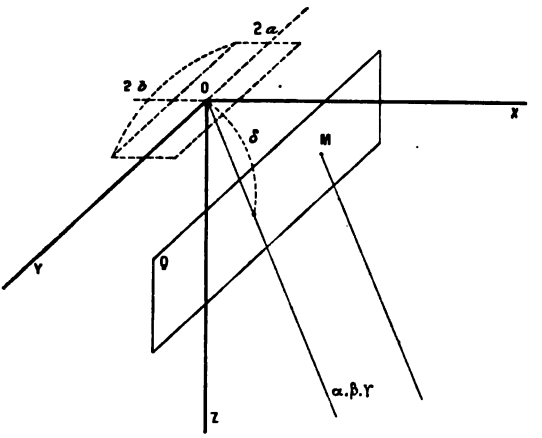
avec

$$A_1 = \int\int_S \cos \frac{2\pi(\alpha x + \beta y)}{\lambda} dx\, dy$$

$$A_2 = \int\int_S \sin \frac{2\pi(\alpha x + \beta y)}{\lambda} dx\, dy.$$

L'amplitude $\mathcal{A}$ du mouvement résultant est donc donnée

Fig. 67.



par la formule

$$\mathcal{A}^2 = A_1^2 + A_2^2.$$

Applications. — I. *L'aire* S *est un rectangle dont le centre coïncide avec l'origine et dont les côtés* $2a$ *et* $2b$ *sont parallèles à* OX *et* OY.

Alors $A_2 = 0$ et tout revient à calculer A_1. On a

$$A_1 = \int_{-a}^{+a} \cos \frac{2\pi\alpha x}{\lambda} dx \int_{-b}^{+b} \cos \frac{2\pi\beta y}{\lambda} dy,$$

Digitized by Google

et l'intensité $\mathcal{A}$ a pour valeur

$$\mathcal{A} = 4ab \frac{\sin \frac{2\pi\alpha a}{\lambda}}{\frac{2\pi\alpha a}{\lambda}} \times \frac{\sin \frac{2\pi\beta b}{\lambda}}{\frac{2\pi\beta b}{\lambda}}.$$

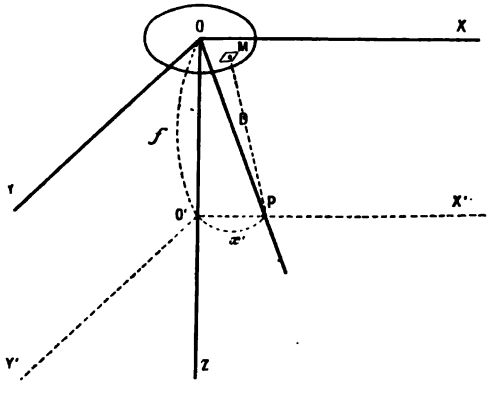
On discutera.

II. *L'aire* S *est un cercle de rayon r dont le centre est en* O *et les mouvements des différents points de cette aire sont concordants.*

Déterminons le mouvement résultant en un point P (*fig.* 68).

Par raison de symétrie, le phénomène est le même pour toutes les directions OP faisant le même angle θ avec OZ.

Fig. 68.



Il suffit donc d'examiner ce qui se passe pour les directions contenues dans le plan XOZ.

A la distance f de O menons un plan X'OY' parallèle à XOY, la direction OP(α, β, γ) est définie si l'on se donne l'abscisse x' du point P où elle rencontre X'O'Y'.

Si P est voisin de O'

$$\alpha = \frac{x'}{f}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$$

Digitized by Google

et l'on a, en exprimant la différence de marche comme plus haut,

$$A_1 = \int\int_S \cos\frac{2\pi x'}{\lambda f} x\,dx\,dy,$$

$$A_2 = \int\int_S \sin\frac{2\pi x'}{\lambda f} x\,dx\,dy.$$

La dernière intégrale est nulle, car les éléments différentiels qui correspondent à des valeurs de x égales et de signe contraire sont eux-mêmes égaux et de signe contraire.

Ainsi

$$A_2 = 0.$$

Calcul de A_1. — Soit $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ l'ordonnée du cercle correspondant à la valeur x de l'abscisse; on a

$$A_1 = \int_{-r}^{+r} \cos\frac{2\pi x'}{\lambda f} x\,dx \int_{-y}^{+y} dy$$

$$= 2\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \cos\frac{2\pi x'}{\lambda f} x\,dx.$$

Si l'on pose

$$x = rw \qquad \text{et} \qquad \frac{2\pi r x'}{\lambda f} = n,$$

il vient

$$A_1 = 2r^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - w^2} \cos nw\,dw = 4r^2\,\varphi(n)$$

avec

$$\varphi(n) = \int_0^{+1} \sqrt{1 - w^2} \cos nw\,dw.$$

Il est facile de vérifier après différentiation sous le signe $\int$ que $\varphi(n)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi(n)}{dn^2} + \frac{3}{n}\frac{d\varphi(n)}{dn} + \varphi(n) = 0.$$

Comme $\varphi(n)$ ne varie pas si l'on change n en $-n$, c'est une fonction paire, son développement en série est de la forme

$$\varphi(n) = a_0 + a_1 n^2 + a_2 n^4 + \ldots + a_{i-1} n^{2i-2} + a_i n^{2i} + \ldots.$$

Digitized by Google

Écrivons que le coefficient de n^{2i-2}, de l'expression obtenue en remplaçant $\varphi(n)$ par son développement dans l'équation différentielle, est identiquement nul; on a

$$a_{i-1} + 2i(2i+2)a_i = 0$$

et, par suite,

$$(i+1)(2.4.6\ldots 2i)^2 a_i = (-1)^i a_0 = (-1)^i \frac{\pi}{4},$$

car

$$a_0 = \int_0^{+1} (1-w^2)^{\frac{1}{2}} dw = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc finalement

$$\varphi(n) = \frac{\pi}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{n^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{n^4}{(2.4)^2} - \frac{1}{4}\frac{n^6}{(2.4.6)^2} + \ldots\right],$$

et par suite,

$$\mathcal{A}^2 = 16\, r^4 [\varphi(n)]^2.$$

Le Tableau suivant renferme les valeurs de n qui correspondent aux maxima et minima successifs, ainsi que les valeurs de $\left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(0)}\right]^2$.

	n.	$\left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(0)}\right]^2$.
Maximum principal.....	0	1
Premier minimum.....	3,85	0
Premier maximum.....	5,23	$\frac{1}{59}$
Deuxième minimum.....	7,14	0
Deuxième maximum.....	8,43	$\frac{1}{240}$
Troisième minimum.....	10,17	0
Troisième maximum	11,63	$\frac{1}{620}$

L'angle $\alpha = \widehat{POO'}$, qui correspond au premier minimum, est tel que

$$\alpha = \frac{x'}{f} = \frac{n\lambda}{2\pi r} = \frac{3,85}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{r} = 0,61\,\frac{\lambda}{r}.$$

Remarque. — Tous ces résultats trouveront leur place dans le cours d'Optique lorsqu'on étudiera les phénomènes de *diffraction* et leur rôle dans la formation des images.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

DÉFORMATIONS ET VIBRATIONS DES MILIEUX. ONDES.

COEFFICIENTS DE DÉFORMATIONS.

Puisque le son est un effet physiologique des vibrations matérielles, l'étude de la génération et de la propagation du son est ramenée à l'étude des vibrations des corps et à celle de leur propagation dans les milieux interposés entre la source sonore et l'oreille.

On est ainsi naturellement conduit à rechercher comment les corps et les milieux réagissent contre les actions que l'on exerce sur eux.

On peut déformer les corps par *pression*, *traction*, *flexion*, *torsion*, etc. Ces déformations éveillent des forces qui tendent à ramener les corps dans leur première figure et dont on exprime les intensités au moyen de coefficients spécifiques que nous allons d'abord brièvement définir.

Nous verrons que, pour les substances isotropes, tous ces coefficients peuvent se calculer au moyen de deux d'entre eux dont le choix dépend de la nature du problème à traiter.

Nous supposerons dans tout ce qui suit que les déformations envisagées sont très petites, c'est-à-dire de l'ordre de celles qui interviennent en Acoustique, et nous déterminerons, dans quelques cas importants, suivant quelle loi de

Digitized by Google

mouvement un système déformé revient à sa position d'équilibre lorsqu'on l'abandonne aux forces engendrées par une déformation initiale déterminée.

TRACTION OU EXTENSION.

Module d'Young. — Soit un fil (ou une tige) parfaitement rectiligne suspendu verticalement. Deux traits déliés α et β, limitent sur le fil une longueur $\overline{\alpha\beta} = l$ à la température t. Suspendons au fil un poids P, le trait α vient en α', le trait β en β', et la distance des deux repères devient $\alpha'\beta' = l'$. Par définition, le module d'Young E, qui correspond à cette expérience, est donné par la formule

$$l' - l = \Delta l = \frac{1}{E}\frac{P}{S}l,$$

S étant la section du fil.

On déduit de là

$$(1) \qquad E = \frac{\frac{P}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{p_1}{l_1},$$

p_1 étant la tension rapportée à l'unité de section et $\frac{\Delta l}{l} = l_1$ l'allongement par unité de longueur.

On voit *a priori* que E est un nombre très grand puisqu'il mesure la tension à exercer par unité de surface pour allonger le fil de sa propre longueur (faire $\Delta l = l$), *en supposant* que, dans tout cet intervalle, il s'allonge comme au début. Et l'on sait quels efforts considérables exige l'allongement sensible d'un fil ou d'une tige de métal ayant par exemple 1^{mm^2} de section, section à laquelle on rapporte d'ordinaire les mesures.

Digitized by Google

Généralement E est exprimé en kilogrammes par millimètre carré. Ainsi, pour le fer, $E = 20000$ environ.

Si E est donné en kilogrammes par millimètre carré, on aura en dynes par centimètre carré

$$E' = E \times 10^3 \times 981 \times 10^2 = 9,81 . 10^7 E,$$

et en kilogrammes par mètre carré

$$E'' = E \times 10^6.$$

Mesure du coefficient E. — On trace les deux repères indiqués plus haut sur le fil et l'on mesure d'abord leur distance l au cathétomètre à deux lunettes, à l'aide des réticules micrométriques et d'une règle divisée fixée au voisinage du fil; puis leurs déplacements Δl après addition du poids tenseur P (en kilogrammes), S étant la section (en millimètres carrés) du fil, on a

$$E = \frac{\frac{P}{S}}{\frac{\Delta l}{l}}.$$

L'unité de longueur n'intervient pas dans l'estimation du rapport $\frac{\Delta l}{l}$ de deux longueurs.

Pour avoir la section S, on détermine la masse m d'une longueur connue l' du fil, et l'on a, ρ désignant la masse spécifique,

$$S = \frac{m}{l'\rho}.$$

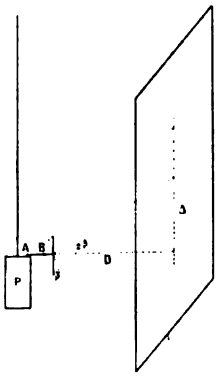
La détermination directe du diamètre δ exige beaucoup de précautions, car il intervient dans S par son carré, ce qui entraîne pour S une erreur relative double de celle dont le diamètre δ est affecté.

Digitized by Google

Dans le dispositif précédent, le déplacement de l'extrémité supérieure du support auquel le fil est fixé, n'altère pas la mesure. Mais la température peut varier et modifier Δl. Pour s'affranchir de cette cause d'erreur, on opère par la méthode du comparateur horizontal du Bureau international des Poids et Mesures : le fil, toujours muni de deux repères déliés, est placé dans une cuve pleine d'eau et les repères sont suivis à l'aide de microscopes à réticule micrométrique.

Si l'on désire opérer dans l'air, on dispose l'un près de l'autre deux fils identiques tendus (méthode de Lord Kelvin); l'un des fils porte vers son extrémité inférieure une réglette le long de laquelle glisse un vernier léger porté par l'autre fil. Une surcharge P appliquée à ce second fil détermine un glissement Δl du vernier qui mesure l'allongement. La température ne modifie pas Δl puisque l'on opère par différence; mais comme E est fonction de la température, la méthode n'est pas complètement à l'abri des critiques.

Fig. 69.



On peut encore mesurer Δl au miroir. Un levier AB (*fig.* 69) tourne autour du point fixe B, l'extrémité A porte

Digitized by Google

une petite bille qui repose sur le poids tenseur P. Si le fil s'allonge de Δl, le levier et par suite le miroir tournent d'un angle β tel que

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\Delta l}{\delta} \qquad (\overline{AB} = \delta).$$

Le rayon lumineux (dispositif de Gauss) s'incline de 2β, d'où, sur la règle située à la distance D du miroir, un déplacement apparent Δ tel que

$$\Delta = D \operatorname{tang} 2\beta.$$

Dans le cas des petits angles, on a

$$\frac{\Delta}{D} = 2\beta = 2\frac{(\Delta l)}{\delta},$$

d'où

$$\Delta l = \frac{\Delta}{D}\frac{\delta}{2},$$

et par suite

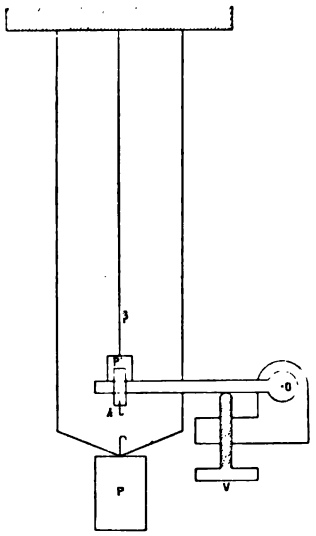
$$E = \frac{P}{S} : \frac{\Delta}{2l}\frac{\delta}{D}.$$

Pour éviter ici l'erreur due au déplacement de l'extrémité supérieure du fil par flexion du support, il faut lire la position initiale du spot sous la charge finale. Pour cela, on s'arrange de façon que la charge soit suspendue directement au support pendant la lecture initiale par deux fils symétriques de façon que la résultante des tensions soit dirigée suivant le fil. Il importe aussi d'accrocher sans choc le poids tenseur au fil afin d'éviter toute extension brusque. Pour cela, on monte la vis V de façon à soulever légèrement le levier mobile autour de O (*fig.* 70), on accroche ensuite la charge en *h* et l'on dévisse lentement la vis V jusqu'à ce que le levier soit rendu indépendant de V.

Digitized by Google

Précision. — Le vernier permet des mesures à $\frac{1}{10}$ de millimètre. Avec le comparateur, l'erreur n'est plus que de l'ordre du micron.

Fig. 70.



Coefficient de Poisson. — Lorsqu'on exerce une traction P sur un fil de diamètre d, en même temps que le fil s'allonge, son diamètre diminue. On appelle *coefficient de Poisson*, le nombre σ mesuré par le rapport de la contraction latérale Δd à l'allongement $\Delta l'$, que subirait la longueur d sous la traction P :

$$\sigma = \frac{\Delta d}{\Delta l'}. \tag{2}$$

La contraction latérale est donnée par une mesure directe, ou déduite de la variation du volume intérieur d'un tube de la substance considérée pour laquelle on connaît le module d'Young.

Digitized by Google

Observations de Hooke. — Le coefficient E étant déterminé, on peut généraliser et parler des effets de compression et d'extension dans un milieu continu. Pour cela, nous admettrons les conclusions auxquelles arriva Hooke (1675) en étudiant les déformations des ressorts.

1° Les déformations très petites sont proportionnelles aux forces qui les produisent;

2° Elles changent de signe sans changer de valeur absolue, si l'on change le signe de l'action;

3° Plusieurs déformations infiniment petites produites simultanément coexistent sans modification et, par suite, ajoutent algébriquement leurs effets.

Dilatation cubique élastique. — Précisons le phénomène dû à l'extension (ou à la compression) longitudinale d'un corps isotrope. Soit un cube d'une substance isotrope, d'arête égale à l'unité. Désignons par 1, 2, 3 les trois systèmes d'arêtes parallèles. Suivant les arêtes 1 (*fig.* 71), exerçons une traction P_1 par unité de surface; ces arêtes s'allongent et deviennent

$$(2\ bis) \qquad 1 + \frac{P_1}{E} \qquad [\text{lois de Hooke } (1°)].$$

Par contre, les arêtes 2 et 3 se raccourcissent et deviennent

$$1 - \sigma \frac{P_1}{E}.$$

En exerçant suivant 2 la traction Q_1, les arêtes 2 deviennent

$$1 + \frac{Q_1}{E},$$

Digitized by Google

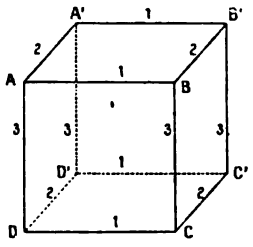
et les arêtes 1 et 3

$$1 - \sigma \frac{Q_1}{E}.$$

Enfin, une traction R_1 suivant les arêtes 3 impose à ces arêtes la longueur $1 + \frac{R_1}{E}$, alors que les arêtes 1 et 2 deviennent

$$1 - \sigma \frac{R_1}{E}.$$

Fig. 71.



D'après la loi de Hooke (3°), superposition des petites déformations; le cube se transforme en un parallélipipède d'arêtes

$$1 + \frac{P_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(Q_1 + R_1),$$

$$1 + \frac{Q_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(P_1 + R_1),$$

$$1 + \frac{R_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(Q_1 + P_1).$$

Donc les variations des arêtes par unité de longueur sont :

$$(3) \qquad \varepsilon = \frac{P_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(Q_1 + R_1),$$

$$(4) \qquad \varepsilon' = \frac{Q_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(P_1 + R_1),$$

$$(5) \qquad \varepsilon'' = \frac{R_1}{E} - \frac{\sigma}{E}(Q_1 + P_1),$$

Digitized by Google

et le volume unité devient par suite

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')$$

ou

$$1+\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'',$$

puisque ε, ε', ε'' sont, par hypothèse, des quantités très petites.

La variation de volume par unité de volume ou *dilatation cubique* relative à la transformation est donc

$$\Theta = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' = \frac{\Delta v}{v}$$

ou

$$\Theta = \frac{1-2\sigma}{E}(P_1 + Q_1 + R_1). \tag{6}$$

Expression des actions P_1, Q_1, R_1, en fonction de Θ, E, σ, ε, ε', ε''. — De l'égalité (3), on tire

$$Q_1 + R_1 = \frac{P_1 - \varepsilon E}{\sigma}.$$

Portant cette valeur dans (6), il vient

$$P_1 \frac{1+\sigma}{\sigma} = E\left(\frac{\Theta}{1-2\sigma} + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

d'où l'on déduit

$$P_1 = \frac{\Theta E \sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} + \frac{\varepsilon E}{1+\sigma},$$

ce qui peut s'écrire

$$P_1 = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon$$

en posant

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \tag{7}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\sigma}. \tag{8}$$

Digitized by Google

De la symétrie des formules (3), (4), (5), il résulte que

$$Q_1 = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon',$$
$$R_1 = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon''.$$

Ce calcul substitue aux coefficients E et σ deux autres constantes λ et μ liées aux premières par les relations (7) et (8).

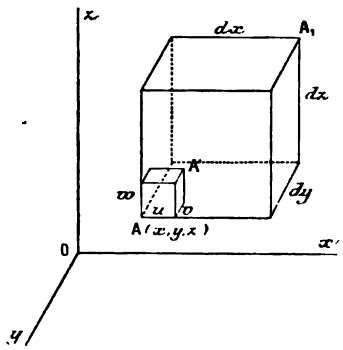
Depuis Lamé, on désigne les tensions normales par N_1, N_2, N_3; nous écrirons donc

$$P_1 = N_1 = \lambda\Theta + 2\mu\varepsilon \tag{9}$$

et deux formules analogues pour N_2 et N_3. On a ainsi l'expression des tensions capables de produire sur le volume 1 la variation Θ et sur les arêtes 1 les allongements ε, ε', ε''.

Expression analytique des tensions N. — Rapportons à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 72), un

Fig. 72.



parallélépipède rectangle, taillé dans la substance, dont deux sommets diagonalement opposés ont pour coordonnées $A(x, y, z)$ et $A_1(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ et dont les

Digitized by Google

arêtes dx, dy, dz sont respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; s'il se produit une déformation, A subit un déplacement AA′ dont les composantes parallèles aux axes sont u, v, w; pour A_1, elles seront $u + du$, $v + dv$, $w + dw$.

Les arêtes dx, dy, dz deviennent alors

$$dx + du = dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$dy + dv = dy\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$dz + dw = dz\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

d'où l'on tire pour les variations de l'unité de longueur parallèlement aux axes

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon' &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon'' &= \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

de sorte que la dilatation cubique Θ au point A a pour expression

$$(11) \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Les valeurs de N_1, N_2, N_3 se trouvent ainsi exprimées en chaque point du milieu considéré en fonction des déformations en ce point.

Pour bien fixer la signification de E et de σ, et par suite de λ et de 2μ, appliquons les expressions précédentes à un certain nombre d'exemples.

Digitized by Google

Exercice. — *Calcul de la variation de volume d'une tige cylindrique subissant une traction.*

Soit à calculer la variation de volume d'une tige de longueur l et de diamètre D subissant une traction p par unité de surface.

Après la déformation, l et D sont devenus l' et D' tels que [(1) et (2)]

$$l' = l\left(1 + \frac{p}{E}\right),$$

$$D' = D\left(1 - \sigma\frac{p}{E}\right).$$

Le volume final v' est donc

$$v' = l\left(1 + \frac{p}{E}\right)\frac{\pi D^2}{4}\left(1 - \sigma\frac{p}{E}\right)^2,$$

ce qui peut s'écrire en négligeant les puissances de $\frac{p}{E}$ supérieures à 1

$$v' = \frac{\pi D^2}{4} l\left[1 + \frac{p}{E}(1 - 2\sigma)\right].$$

Mais le volume initial est

$$v = \frac{\pi D^2}{4} l,$$

donc la variation de volume est

$$v' - v = v\frac{p}{E}(1 - 2\sigma). \tag{12}$$

Il y a ici deux effets contraires : l'allongement qui tend à augmenter le volume v, et la contraction qui tend à le diminuer. Il y a augmentation de volume si l'on a

$$1 - 2\sigma > 0,$$

c'est-à-dire $\sigma < \frac{1}{2}$.

Digitized by Google

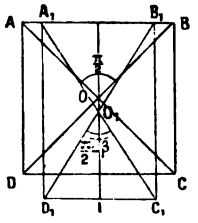
Or, en général, σ est voisin de $\frac{1}{4}$, et par suite

$$\nu' > \nu.$$

Pour le caoutchouc $\sigma = \frac{1}{2}$, d'où $\nu' = \nu$; et pour le liège $\sigma = 0$.

Déformation mettant en évidence la seule constante μ. — Sur les faces opposées ABB'A' et DCC'D' du cube ABCD, A'B'C'D', d'arête égale à l'unité (*fig.* 73), exerçons une

Fig. 73.



traction uniforme p par unité de surface, le carré ABCD devient le rectangle $A_1 B_1 C_1 D_1$ dont les diagonales font l'angle $\frac{\pi}{2} - \beta$. Calculons β en fonction de p, E et σ.

On a

$$\operatorname{tang} \widehat{D_1 O_1 I} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{D_1 I}{O_1 I} = \frac{1 - \sigma \frac{p}{E}}{1 + \frac{p}{E}},$$

ce qui peut s'écrire par développement de la tangente

$$\frac{1 - \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \sigma \frac{p}{E}}{1 + \frac{p}{E}}$$

Digitized by Google

ou, puisque β est petit,

$$\frac{1-\frac{\beta}{2}}{1+\frac{\beta}{2}}=1-\beta=\frac{1-\sigma\frac{p}{E}}{1+\frac{p}{E}}=1-\frac{p}{E}-\sigma\frac{p}{E},$$

d'où l'on déduit

$$\beta=\frac{p}{E}(1+\sigma)$$

ou encore, d'après (8),

$$\beta=p\frac{1}{2\mu}. \tag{13}$$

Coefficient de compression uniforme. — Considérons un solide de volume v placé dans une enceinte où l'on comprime de l'air : tous les éléments subissent des pressions *normales pratiquement uniformes* p et la variation de volume Δv est proportionnelle à v et p, d'où

$$\Delta v=Kpv \qquad (K=\text{const.}).$$

Le volume final v' est donc

$$v'=v(1+Kp).$$

Dans le cas d'un cube isotrope d'arête unité, chaque arête se raccourcit (3) de

$$\varepsilon=\frac{p}{E}-2\sigma\frac{p}{E}=\frac{p}{E}(1-2\sigma),$$

mais le cube reste cube et son volume diminue de 3ε, donc

$$\Delta v=-\frac{3p}{E}(1-2\sigma).$$

Digitized by Google

Nous poserons donc

$$K = \frac{3}{E}(1 - 2\sigma),$$

d'où

$$v' = v\left[1 + \frac{3(1 - 2\sigma)}{E}p\right], \tag{14}$$

à la condition de considérer le nombre p comme positif dans le cas d'une traction et comme négatif dans le cas d'une pression.

Coefficient d'élasticité dans le cas où la compression s'exerce par plans parallèles dans un milieu indéfini. — Soit, dans le milieu indéfini, un cube unité dont deux des faces sont parallèles aux plans considérés et exerçons la compression p.

D'après la condition créée par le fait que le milieu est *indéfini*, les arêtes perpendiculaires à la compression doivent conserver la longueur 1, et par suite le milieu doit exercer une réaction p_1 normale à la direction de la compression p. Sous l'action de p et de p_1 les arêtes perpendiculaires à la compression p deviennent

$$1 + \sigma\frac{p}{E} - \frac{p_1}{E} + \sigma\frac{p_1}{E}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\sigma p}{E} - \frac{p_1}{E} + \frac{\sigma p_1}{E} = 0$$

ou

$$p_1 = p\frac{\sigma}{1 - \sigma}. \tag{15}$$

Digitized by Google

Alors, les arêtes parallèles à la compression p deviennent

$$1 - \frac{p}{E} + \frac{2\sigma}{E} p_1$$

ou

$$(16) \qquad 1 - \frac{p}{E} + \frac{2\sigma^2 p}{E(1-\sigma)},$$

et le volume v du cube prend la valeur

$$v' = 1 - \frac{p}{E}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right)$$

que nous pouvons écrire

$$v' = v(1 + Kp)$$

en posant

$$K = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right) = \frac{1}{E}\,\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma},$$

et adoptant pour p les conventions de signe du paragraphe précédent.

Le fait que le milieu est gêné substitue au module d'Young E le facteur E′ tel que

$$(17) \qquad E' = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},$$

puisque la formule (16) montre que l'arête de longueur 1 parallèle à la contraction devient

$$1 - \frac{p}{E'} \qquad [\textit{comparer} \text{ à la formule } (2\ \textit{bis})].$$

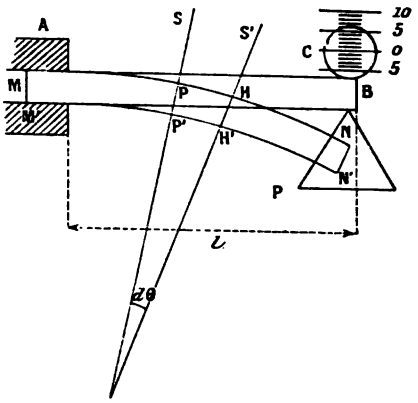
Les formules précédentes interviennent dans la théorie de la propagation des ondes au sein d'un milieu indéfini.

Digitized by Google

FLEXION.

Condition d'équilibre. — Nous allons établir que les lois de la flexion sont des conséquences immédiates de l'existence du module d'Young. Prenons une tige horizontale encastrée en A (*fig.* 74) et appliquons en B une force

Fig. 74.



verticale F : la barre fléchit et prend une forme curviligne. Le filet MN s'est donc allongé, le filet M'N' s'est, au contraire, raccourci et l'on conçoit que, par continuité, il y ait entre MN et M'N' des filets qui conservent leur longueur ; ces filets constituent, par leur ensemble, une *surface de fibres neutres.*

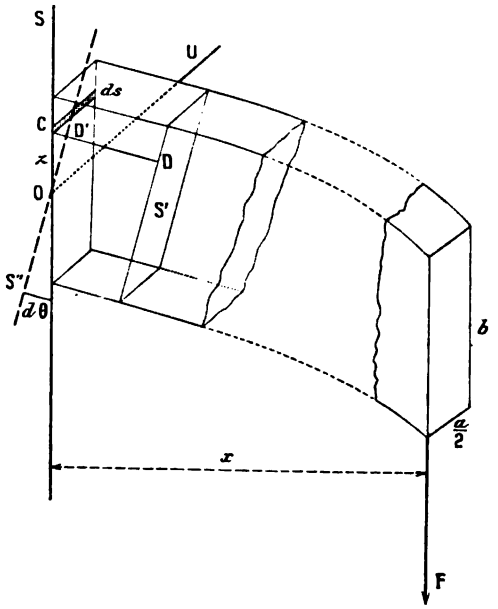
Considérons deux sections droites faites par deux plans S et S' infiniment voisins et perpendiculaires au plan de la figure (*fig.* 74). Si l'on fixe S' et si l'on coupe le solide suivant S, il faudra, pour maintenir les fibres du tronçon SS' dans leur état, tirer sur les fibres telles que PH et comprimer les fibres telles que P'H'. Ce sont les forces dues à

Digitized by Google

l'allongement ou à la compression des fibres qui introduisent dans la théorie de la flexion le module d'Young.

Supposons que la pièce admette un plan de symétrie et prenons-le pour plan du Tableau. Soit OU (*fig.* 75) l'in-

Fig. 75.



tersection du plan S avec la surface des fibres neutres; cette intersection est, dans les problèmes que nous avons en vue, une droite perpendiculaire au plan du Tableau. Pour que le système S*b* soit en équilibre, il faut que la somme des moments des forces qui lui sont appliquées, par rapport à l'axe OU, soit nulle; il vient donc

$$(18) \qquad Fx = \Sigma f\, ds\, z,$$

f étant la force appliquée par unité de surface à l'aire *ds*

Digitized by Google

située à la distance z de OU dans le plan S, et après coupure suivant S, pour maintenir le système considéré Sb dans son état d'équilibre primitif.

Comme la courbure est faible, x diffère peu de la longueur de la pièce comprise entre S et l'extrémité non encastrée.

Calcul de f et de $\Sigma f ds z$. — Soit $d\theta$ l'angle des deux plans S et S'. Menons par OU le plan S'' parallèle à S' : les portions de fibres comprises entre S et S'' sont les allongements et les contractions d'une même longueur dx des diverses fibres du tronçon initial SS'.

Pour le filet D'D considéré, de longueur dx, l'allongement est $CD' = z\,d\theta$; donc [form. (1)] la force par unité de surface f qui correspond à cet allongement est

$$f = \mathrm{E}\,z\,\frac{d\theta}{dx},$$

et la formule (18) devient

$$(19) \qquad \mathrm{F}x = \Sigma \mathrm{E}\frac{d\theta}{dx}z^2\,ds = \mathrm{E}\frac{d\theta}{dx}\int_{\mathrm{S}} z^2\,ds = \mathrm{E}\mathfrak{I}\frac{d\theta}{dx},$$

si l'on pose

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathrm{S}} z^2\,ds.$$

$\mathfrak{I}$ est le moment d'inertie de la section S par rapport à l'axe OU (la densité superficielle étant supposée ici égale à l'unité).

Angle de flexion. — L'angle de flexion Θ est l'angle que forment les tangentes aux deux extrémités de la pièce.

De (19) on déduit

$$d\theta = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}\mathfrak{I}}x\,dx,$$

Digitized by Google

d'où, par intégration, si $\mathfrak{I}$ est constant lorsque x varie,

$$(20) \qquad \Theta = \frac{F}{E\mathfrak{I}} \int_0^l x\,dx = \frac{F}{E\mathfrak{I}} \frac{l^2}{2},$$

l désignant la longueur de la pièce.

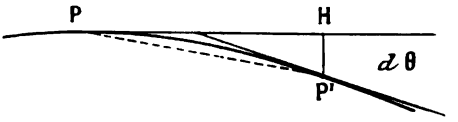
Calcul de la flèche. — La flèche est le déplacement dans le sens de la force de l'extrémité NN′ non encastrée de la pièce. Si en deux points P et P′ (*fig.* 76) situés à une distance x de l'extrémité libre, les tangentes font un angle $d\theta$, la flèche correspondante $d\varphi$ est

$$d\varphi = x\,d\theta = \frac{F}{E\mathfrak{I}} x^2\,dx,$$

d'où par intégration

$$(21) \qquad \varphi = \frac{F}{E\mathfrak{I}} \frac{l^3}{3} = \frac{2}{3} l\Theta.$$

Fig. 76.



Ainsi, toutes autres choses égales, l'abaissement d'un point de la tranche verticale extrême est proportionnel au cube de la longueur.

Applications. — 1. *Cas d'une pièce rectangulaire.* — Soient a et b les dimensions du rectangle de section droite, b étant relatif à la dimension parallèle à F; nous avons

$$ds = a\,dz$$

Digitized by Google

et, comme z doit varier de $-\frac{b}{2}$ à $+\frac{b}{2}$,

$$(22) \qquad \mathfrak{I} = a\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} z^2\,dz = \frac{ab^3}{12},$$

d'où [(20) et (21)]

$$(23) \qquad \Theta = \frac{6Fl^2}{Eab^3},$$

$$(24) \qquad \varphi = \frac{4Fl^3}{Eab^3}.$$

Des deux dimensions de la section droite, celle qui intervient par son cube est celle qui est parallèle à la force.

Les résultats précédents ont été vérifiés par l'expérience.

Expérience. — Une tige d'acier à section rectangulaire (*fig.* 74) est solidement encastrée par une de ses extrémités. L'autre extrémité porte un plateau P très léger et un anneau sur lequel est tendu un cheveu C qui se déplace devant une graduation gravée sur verre. On projette l'image de l'anneau et de l'échelle sur un écran.

1° L'index se trouvant sur la division 0, on met 250^g sur P : la déviation est de 7 divisions. Si l'on met 500^g au lieu de 250^g, l'index vient en face de 14. La flèche est donc bien proportionnelle à F.

2° On diminue de moitié la longueur de la tige et l'on remet le poids de 500^g, la déviation est de 1,8, c'est-à-dire sensiblement $\frac{14}{8} = 1,75$ comme l'exige la loi du cube de la longueur. Mêmes opérations pour a, b.

2. *Cas d'une pièce de section circulaire de rayon* R *et de longueur* l. — Par raison de symétrie, la valeur de $\mathfrak{I}$ ne

Digitized by Google

dépend pas du diamètre considéré : elle est la même pour deux diamètres rectangulaires. $\mathfrak{I}$ est donc la moitié du moment d'inertie de la section par rapport à son centre et l'on a

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\int_0^R r^2\,ds.$$

Pour une couronne de rayon r et d'épaisseur dr,

$$ds = 2\pi r\,dr,$$

donc

$$\mathfrak{I} = \pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{4} \tag{25}$$

et il vient

$$\Theta = \frac{2}{\pi E}\frac{l^3}{R^4}F, \tag{26}$$

$$\varphi = \frac{4}{3\pi E}\frac{l^3}{R^4}F. \tag{27}$$

3. *Cas d'un tube circulaire.* — Soient respectivement R_1 et R_2 les rayons intérieur et extérieur d'un tube circulaire de longueur l.

On a

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2} r^2\,ds = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4), \tag{28}$$

et par suite

$$\Theta = \frac{2}{\pi E}\frac{l^3}{R_2^4 - R_1^4}F, \tag{29}$$

$$\varphi = \frac{4}{3\pi E}\frac{l^3}{R_2^4 - R_1^4}F. \tag{30}$$

Courbe suivant laquelle se disposent les filets de la tige fléchie. — L'extrémité non encastrée B étant prise pour ori-

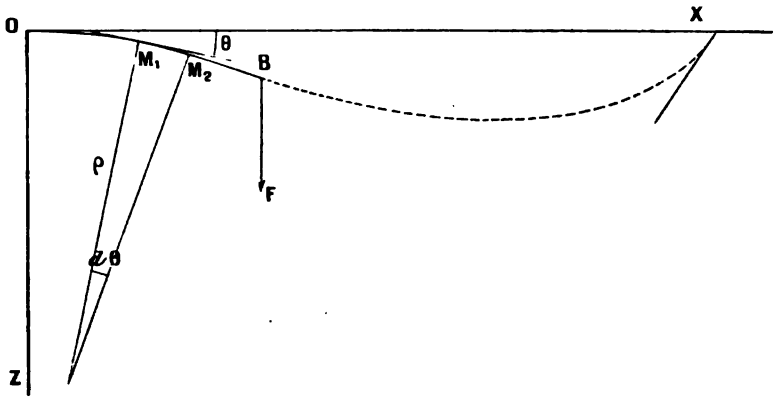
Digitized by Google

gine des x nous avons trouvé pour équation d'équilibre (18)

$$Fx = E\mathfrak{I}\frac{d\theta}{dx}.$$

Prenons maintenant comme origine l'extrémité encastrée O (*fig.* 77) et comme axes OX et OZ respectivement

Fig. 77.



l'axe de la tige horizontale avant la flexion et la verticale du point O, les directions positives de ces axes étant celles de O vers B et de la force F.

Avec ces conventions, l'équation précédente devient

$$F(l - X) = E\mathfrak{I}\frac{d\theta}{dX} = \frac{\mathfrak{I}E}{\rho}, \tag{31}$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe au point M.

On sait que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2Z}{dX^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dZ}{dX}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Digitized by Google

Or

$$\frac{dZ}{dX} = \tang \theta,$$

et comme θ est très petit, $\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2$ est négligeable devant l'unité et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2Z}{dX^2}.$$

Par suite, l'équation (31) devient

$$\frac{d^2Z}{dX^2} = \frac{F}{E\mathfrak{I}}(l - X).$$

Par intégration, on obtient successivement

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{FX}{E\mathfrak{I}}\left(l - \frac{X}{2}\right)$$

et

$$(32). \qquad Z = \frac{FX^2}{2E\mathfrak{I}}\left(l - \frac{X}{3}\right),$$

car pour $X = 0$ on doit avoir, à la fois,

$$Z = \frac{dZ}{dX} = 0.$$

Ces conditions expriment que la courbe passe par l'origine fixe O et qu'elle est tangente à l'axe OX en ce point. La courbe (32) admet un point d'inflexion pour $X = l$, passe par un minimum pour $X = 2l$, et recoupe l'axe des X pour $X = 3l$, mais la première partie présente seule un intérêt physique.

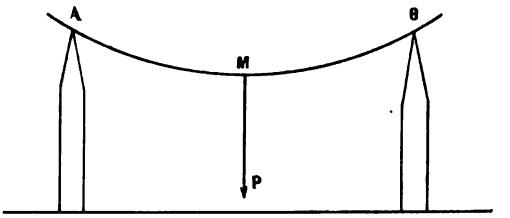
L'équation (32) permet de retrouver la valeur de φ, qui n'est autre chose que la valeur de Z pour $X = l$; on obtient

$$\varphi = \frac{F}{E\mathfrak{I}}\frac{l^3}{3}.$$

Digitized by Google

Dynamomètre de Poncelet. — On applique la force P à mesurer au milieu M (*fig.* 78) d'une lame de longueur l appuyée sur deux arêtes A et B. Si la flexion est faible, on

Fig. 78.



peut supprimer le support à la condition d'appliquer aux points A et B de la lame des forces $\frac{P}{2}$ dirigées vers le haut, et fixer le point M sans troubler l'équilibre.

Nous sommes ainsi ramenés à calculer la flexion d'une tige de longueur $\frac{l}{2}$ encastrée à l'une de ses extrémités (qui serait ici M), l'autre étant soumise à un effort $\frac{P}{2}$. Si la tige est à section rectangulaire, le déplacement du point M sous l'action de P sera donc (24)

$$\varphi = \frac{4}{Eab^3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 \frac{P}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{Pl^3}{Eab^3}.$$

OSCILLATIONS DE FLEXION.

Vibrations transversales des verges. Diapason. — Une verge faiblement fléchie, puis abandonnée à elle-même, exécute de part et d'autre de sa position d'équilibre des vibrations dont on peut se proposer de rechercher les lois. Nous nous bornerons au cas du diapason, forme la plus courante sous laquelle on emploie les verges vibrantes : le

Digitized by Google

diapason est constitué par un U forgé, ou taillé, avec la queue qui sert à le supporter ou à le fixer, dans une plaque d'acier. Après recuit et travail à la raboteuse et à la lime, on accorde le diapason pour la fréquence N qu'il doit avoir.

Les branches du diapason sont généralement à section rectangulaire et l'on doit distinguer la dimension a perpendiculaire aux vibrations ou *largeur* de la branche de la dimension b parallèle aux vibrations ou *épaisseur*. Par *longueur* l des branches, on entend la projection du demi U qu'elles forment sur le plan médian de l'appareil perpendiculaire au plan de vibration.

Il est difficile, *a priori*, de déterminer à quel type de verge vibrante correspond le diapason, mais il est naturel pourtant de comparer ses propriétés à celles d'une verge vibrante (l, a, b) qui serait *encastrée* à l'une de ses extrémités et *libre* à l'autre. La région où les deux branches se raccordent à la queue serait alors la région d'encastrement.

En admettant que les déplacements transversaux sont très petits, on se place dans le cas des déformations élastiques dont nous venons d'examiner les propriétés, et il est alors possible de trouver l'équation des vibrations transversales d'une verge.

Remarque sur le moment de flexion. — On a vu (p. 227) qu'en désignant par E le module d'Young et par $\mathfrak{I}$ le moment d'inertie de la section d'une barre par rapport à l'axe Gy, mené par son centre de gravité perpendiculairement au plan de flexion, les réactions dues à l'allongement des fibres placées au-dessus du plan des fibres neutres et à la compression des fibres placées au-dessous de ce plan appliquent à la section d'abscisse x des forces dont le

Digitized by Google

moment par rapport à Gy a pour mesure

$$\mathfrak{M} = E\mathfrak{I}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{E\mathfrak{I}}{\rho},$$

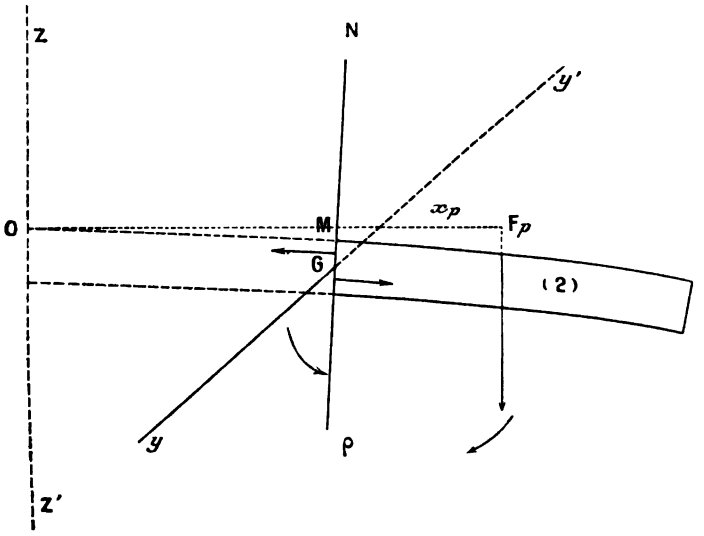
ρ étant le rayon de courbure en M de la fibre déformée, ou encore en tenant compte pour ρ de l'approximation discutée page 231,

$$\mathfrak{M} = E\mathfrak{I}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Pour la section M′ d'abscisse $x + dx$, ce moment devient $\mathfrak{M} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}dx$ et varie par suite de

$$E\mathfrak{I}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx.$$

Fig. 79.



Force de glissement ou effort tranchant. — Si l'on considère (*fig.* 79) le tronçon (2) supposé isolé de la verge par la

Digitized by Google

section N d'abscisse x, il devra être en équilibre sous l'action du couple de moment

$$E\mathfrak{I}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

des forces déformantes F_p d'abscisses x_p supposées parallèles à ZZ' et d'une force Z dite de *glissement* située dans le plan de la section. Toutes ces forces sont dans le plan xOZ; il faut pour l'équilibre : 1° que les projections des forces sur ZZ' soient nulles; on a donc

$$Z + \Sigma F_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$Z = -\Sigma F_p,$$

et 2° que le moment des actions appliquées à (2) par rapport à Gy soit également nul, d'où la condition

$$\mathfrak{M} = \Sigma F_p(x_p - x);$$

cette dernière relation donne

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = -\Sigma F_p = Z,$$

donc la force de glissement relative à la section d'abscisse x a pour valeur

$$Z = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = E\mathfrak{I}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Équation du mouvement. — Nous pouvons maintenant écrire l'équation du mouvement d'une tranche. Les forces parallèles aux déplacements transversaux zz' (*fig.* 80), appliquées à l'élément isolé de masse $s\rho\, dx$, se réduisent à $-\frac{\partial Z}{\partial x}dx$, c'est-à-dire à

$$-E\mathfrak{I}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}dx,$$

Digitized by Google

car en passant de la section d'abscisse x à la section d'abscisse $x + dx$, la force de glissement passe de Z à $Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx$. Si l'on isole l'élément, il faudra donc appliquer à la section $x + dx$ la force $-\left(Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx\right)$ pour maintenir l'élément dans son état, d'où l'action résultante $\frac{\partial Z}{\partial x} dx$.

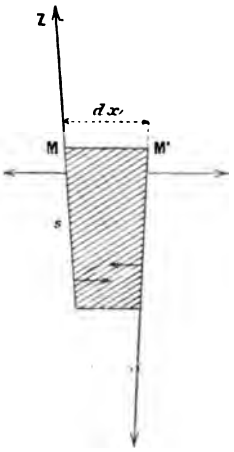
L'équation du mouvement de la tranche sera par suite

$$s\,\rho dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -E\mathfrak{I} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{E\mathfrak{I}}{s\rho} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0.$$

Fig. 80.



Le mouvement sinusoïdal

$$(2) \qquad z = u \sin(\omega t + \beta),$$

où l'amplitude u est une fonction de la position x de la tranche, est-il compatible avec cette équation ? Et, dans le cas de l'affirmative, *à quelle condition ?*

Digitized by Google

En posant $\frac{E\delta}{s\rho} = p^2$, l'équation à vérifier s'écrit

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + p^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0,$$

et comme d'après (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -u\omega^2 \sin(\omega t + \beta), \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \sin(\omega t + \beta),$$

il vient, en substituant dans (3) et posant $\frac{\omega^2}{p^2} = f^4$,

$$-u\omega^2 + p^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f^4 u.$$

Cette équation du 4e ordre s'intègre par la méthode générale; son équation caractéristique est

$$r^4 - f^4 = 0,$$

et la fonction u est, par suite, de la forme

$$u = \mathrm{M} e^{fx} + \mathrm{N} e^{-fx} + \mathrm{P} \sin fx + \mathrm{Q} \cos fx.$$

Ainsi les diverses tranches d'une verge élastique faiblement fléchie pourront vibrer transversalement suivant la loi harmonique

$$z = u \sin(\omega t + \beta),$$

à la condition que les amplitudes des tranches successives soient régies par la loi

$$u = \mathrm{M} e^{fx} + \mathrm{N} e^{-fx} + \mathrm{P} \sin fx + \mathrm{Q} \cos fx,$$

les constantes M, N, P, Q étant déterminées dans chaque cas par des conditions mécaniques imposées à la verge vibrante.

Digitized by Google

Dans le cas que nous examinons, la tige est supposée encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre. A l'extrémité encastrée $x = 0$, le déplacement $z = 0$, le filet fléchi reste tangent à sa position de repos, donc $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. A l'extrémité libre le moment de flexion $\mathfrak{M} = E\mathfrak{I}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et l'effort tangentiel $Z = E\mathfrak{I}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ sont nuls; on a donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0 \qquad (\text{pour } x = l).$$

En écrivant que ces quatre conditions sont réalisées, on obtient les quatre équations

$$(4) \qquad \begin{cases} M + N + Q = 0, \qquad M - N + P = 0, \\ Me^{fl} + Ne^{-fl} - P\sin fl - Q\cos fl = 0, \\ Me^{fl} - Ne^{-fl} - P\cos fl + Q\sin fl = 0, \end{cases}$$

ce qui donne par l'élimination, d'ailleurs immédiate, de M, N, P, Q, la condition

$$(5) \qquad (e^{\theta} + e^{-\theta})\cos\theta + 2 = 0,$$

en posant

$$\theta = fl.$$

En conséquence, ayant choisi une solution $\theta = fl$ de l'équation (5) résolue par approximations successives ou par la méthode graphique (*fig.* 81), on la portera dans le système (4) et l'on en déduira les valeurs de M, N, P, Q convenant au cas considéré. De plus, et c'est là le point fondamental de cette théorie, la période des vibrations transversales qui pourront s'installer dans la verge vibrante sera définie par

$$\frac{\omega^2}{p^2} = f^4.$$

Digitized by Google

Fréquence des vibrations de la tige. — En désignant par N la fréquence, on a $\omega = 2\pi N$, et la condition $\omega^2 = p^2 f^4$ donne

$$N = \frac{1}{2\pi} p f^2 = \frac{1}{2\pi} p \frac{\Theta^2}{l^2}.$$

Si l'on remplace p par sa valeur $p = \sqrt{\frac{E\mathfrak{I}}{s\rho}}$, il vient

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{s}}\frac{\Theta^2}{l^2}.$$

La fréquence N dépend de la nature de la substance de la verge par le facteur $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ qui mesure la vitesse avec laquelle se propagent les *vibrations longitudinales* dans la tige (*voir* plus loin). Le facteur $\sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{s}}$ dépend de l'*étendue* de la section et de sa *forme*. En général, la section est un rectangle, alors

$$\mathfrak{I} = \int z^2\, ds = \frac{ab^3}{4.3},$$

d'où

$$\frac{\mathfrak{I}}{s} = \frac{b^2}{4.3}.$$

En conséquence, $N = K\frac{b}{l^2}$ si l'on pose

$$K = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\Theta^2.$$

Pour une substance donnée, la fréquence du diapason est :

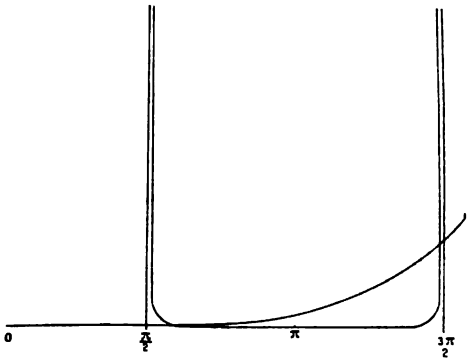
1° Proportionnelle à l'épaisseur des branches ;

2° En raison inverse du carré de la longueur des branches. On remarquera que la largeur des branches n'intervient pas.

Digitized by Google

Pour expliciter complètement N et obtenir la série des sons que le diapason peut rendre, il faut déterminer les

Fig. 81.



racines Θ de l'équation (5). C'est ce qui a été fait (*fig.* 81) en prenant l'intersection des courbes

$$y_1 = e^{\theta} + e^{-\theta},$$

$$y_2 = -\frac{2}{\cos\theta}.$$

On trouve ainsi, en rangeant les racines par ordre de grandeur,

$$1{,}19\frac{\pi}{2},\quad 2{,}98\frac{\pi}{2},\quad 5\frac{\pi}{2},\quad 7\frac{\pi}{2},\quad \ldots,\quad (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

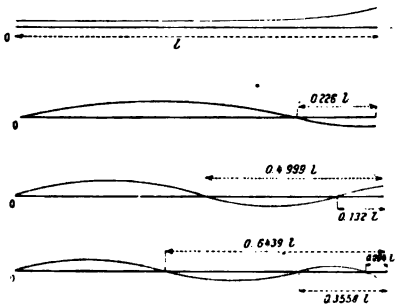
Comme la fréquence N est proportionnelle à Θ^2, on voit que les sons rendus par la verge varient comme la suite *des carrés des nombres impairs* (à partir du troisième son).

Position des nœuds. — D'autre part, connaissant Θ, la position des nœuds s'obtient en remplaçant f par $\frac{\Theta}{l}$ dans l'expression de u et cherchant pour quelles valeurs de x le

Digitized by Google

déplacement u est nul. On trouve pour la distance $l - x$ des nœuds, à partir de l'extrémité libre de la verge, les nombres inscrits sur la figure 82.

Fig. 82.



Remarque I. — Il n'y a plus ici de sons formant une série harmonique proprement dite, ni d'équidistance des nœuds. De plus, par substitution de $z = u \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{VT}\right)$ dans l'équation (2), on constate que V doit dépendre de la période T de la vibration. V varie en raison inverse de la racine carrée de la période.

Remarque II. — Le diapason se comporte comme une verge dont l'une des extrémités serait encastrée et l'autre libre; mais on peut, dans d'autres problèmes, avoir à considérer les cas où les conditions aux extrémités sont les suivantes :

1° Verge reposant librement sur deux appuis à ses extrémités

$$z = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

pour $x = 0$ et $x = l$;

Digitized by Google

2° Verge encastrée à ses deux extrémités

$$z = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

pour $x = 0$ et $x = l$.

Étude expérimentale du diapason. — En enregistrant les vibrations d'un diapason à côté de celles d'un pendule, Mercadier a constaté (1876) que la fréquence N d'un diapason dont la longueur l et l'épaisseur b restaient constantes, n'était pas modifiée en donnant à la largeur a les valeurs suivantes :

	mm	mm	mm
a.....	35,3	30,9	24,8
N.....	144,7	144,7	144,9

I. *La fréquence* N *est donc sensiblement indépendante de la largeur a des branches du diapason.*

En faisant porter la variation sur l'épaisseur b, Mercadier a obtenu les résultats suivants :

b.	N.	$K = \frac{N}{b}$.
10,25.....	87,98	8,6
9,25.....	81,18	8,7
8,58.....	74,32	8,6
7,7.....	67,43	8,7

II. *La fréquence* N *du diapason peut être considérée comme proportionnelle à l'épaisseur b des branches.*

En désignant par l la longueur d'une branche (projection de la branche sur le plan médian) et en réduisant la longueur d'un diapason donné de 30^{cm} à 6^{cm} environ, l'expé-

Digitized by Google

rience a fourni les résultats suivants :

l.	N.	Nl^2.
mm		
295,4.....	40	3485720
275,2.....	45,95	3480023
255,7.....	53,24	3481937
216,2.....	74,11	3464050
156,5.....	139,54	3417614
116,4.....	247,05	3350245
96,6.....	354,54	3308567
76,4.....	549,37	3231944
57.....	974	3142124

Le produit Nl^2 n'est pas constant, mais il varie assez peu pour que l'on puisse couper un tiers de la longueur du diapason sans que l'erreur qui résulte de la loi $N = \frac{k}{l^2}$ excède 0,01 ; la suppression du second tiers ferait passer cette erreur à 0,03, car on conçoit que l'influence de la courbure, dont on ne tient pas compte, s'exagère lorsque les branches diminuent de longueur. Néanmoins, dans de larges limites, il est admissible de considérer :

III. *La fréquence* N *d'un diapason comme variant en raison inverse du carré de la longueur des branches.*

TORSION.

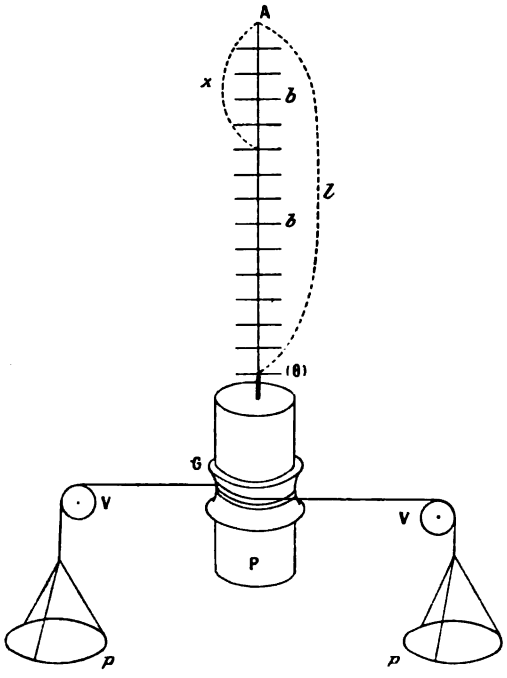
Les applications à la Métrologie des lois établies sur la torsion des fils par Coulomb, et sur celle des barres par Savart et Wertheim, donnent à l'étude de la torsion une importance particulière.

Expérience. — Un fil fixé en A (*fig.* 83) est maintenu bien rectiligne par une masse cylindrique P dont l'axe est dans le

Digitized by Google

prolongement du fil. Le fil porte de très légers brins de paille b équidistants, parallèles et horizontaux. Le cylindre P

Fig. 83.



est munie d'une poulie à gorge G, de diamètre D, sur laquelle s'enroulent, de façon à ajouter leurs effets, deux fils qui passent sur deux petites poulies verticales V et supportent deux plateaux p. En mettant des poids égaux f dans ces deux plateaux, on applique au système un couple de moment $\mathfrak{M} = f.D$, et l'on constate que les pailles restent horizontales, tournent d'un angle proportionnel à leur distance au point A et donnent naissance à une surface hélicoïdale.

Digitized by Google

Si donc Θ est l'angle dont a tourné le brin inférieur et l la longueur du fil, $\Theta_1 = \frac{\Theta}{l}$ mesure la rotation par unité de longueur ; donc, à la distance z de A, la rotation sera

$$\Theta_1 z = \Theta \frac{z}{l}. \tag{33}$$

Appliquons au cylindre, successivement, des couples de moments $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, ... ; ils produisent les rotations respectives Θ, Θ', Θ'', ... du brin inférieur; l'expérience montre que les nombres $\mathfrak{M}$ et Θ vérifient la condition

$$\frac{\mathfrak{M}}{\Theta} = \frac{\mathfrak{M}'}{\Theta'} = \frac{\mathfrak{M}''}{\Theta''} = \ldots = C;$$

d'où nous déduisons la relation importante

$$\mathfrak{M} = C\Theta, \tag{34}$$

qui exprime la proportionnalité du moment de réaction du fil à l'angle de torsion.

Le nombre C mesure la *constante de torsion* du fil utilisé.

Dans une série de recherches, Coulomb étudia la variation de C en fonction de la nature, de la longueur l et du diamètre d du fil. Ses conclusions sont traduites par la formule

$$C = \gamma \frac{d^4}{l} \tag{35}$$

qui exprime que la réaction de torsion est proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre du fil et en raison inverse de sa longueur; γ est un coefficient spécifique de la substance du fil.

Remarque. — Le couple de torsion est le même quel que soit le point du fil. A la distance z de A, la rotation

Digitized by Google

est (33) $\Theta\frac{z}{l}$; en vertu de (35) et (34), on a

$$C_z = \gamma\frac{d^4}{z}$$

et

$$\mathfrak{M}_z = \left(\gamma\frac{d^4}{z}\right)\left(\Theta\frac{z}{l}\right) = \gamma d^4\frac{\Theta}{l} = C\Theta,$$

produit indépendant de z.

Courbe suivant laquelle se dispose un filet du fil supposé cylindrique. — Soit OZ l'axe d'un fil cylindrique. Prenons comme axes de coordonnées d'abord OZ, puis deux droites rectangulaires OX et OY du plan de la section droite d'attache du fil.

Appliquons au système un couple de moment $\mathfrak{M}$, le fil se tord et le point M tourne (33) d'un angle $\Theta_1 z$. Donc les coordonnées des points de la génératrice AA', située dans le plan XOZ à la distance r de l'axe, deviennent

$$x = r\cos\Theta_1 z,$$
$$y = r\sin\Theta_1 z,$$
$$z = z,$$

puisque l'expérience montre (trou fin pratiqué dans le fil perpendiculairement à l'axe à travers lequel passe un rayon lumineux après comme avant la torsion) que dans la rotation tous les rayons d'une même section droite restent dans le même plan.

La courbe définie par ces équations est une hélice qui fait avec les génératrices du cylindre l'angle

$$\varphi = r\Theta_1.$$

Cet angle, dont la valeur est immédiatement donnée par

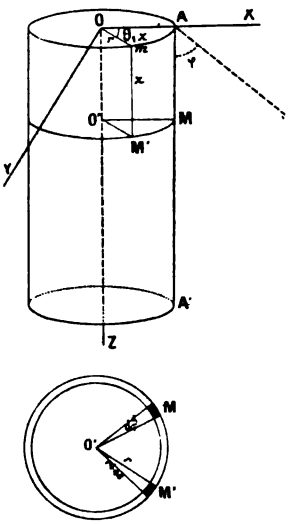
Digitized by Google

le développement de la surface du cylindre, où il apparaît comme un glissement (p. 249), constant pour la surface d'un cylindre déterminé, est le facteur caractéristique de la déformation par torsion.

Lois de la torsion déduites de la théorie. — Après avoir examiné l'effet géométrique d'une torsion, nous allons faire des hypothèses, où φ entre en ligne de compte, sur les forces qui s'opposent à la déformation.

Considérons en M un élément de surface dS limité d'abord

Fig. 84.



par deux rayons faisant l'angle $d\beta$, puis par une couronne de rayon r et d'épaisseur dr (*fig.* 84). On a

$$dS = r\,d\beta\,dr.$$

Sous l'action de la torsion, M vient en M'. Admettons que la *force tangentielle périphérique* qui tend à ramener M' en M

Digitized by Google

soit proportionnelle à dS et à φ. Alors son moment, par rapport à l'axe, a pour expression

$$d\mathfrak{M} = K\,dS\,\varphi\,r = K r^2 \varphi\,d\beta\,dr = K\Theta_1\,d\beta\,r^3\,dr,$$

et en intégrant dans l'étendue de la section droite

$$(36)\quad \mathfrak{M} = K\Theta_1 \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^R r^3\,dr = 2\pi K\Theta_1 \frac{R^4}{4} = \pi K \frac{\Theta}{l}\frac{d^4}{32},$$

en introduisant le diamètre d du fil, seul accessible à l'expérience.

Signification de γ. — Comparons les formules (34), (35) et (36), il vient

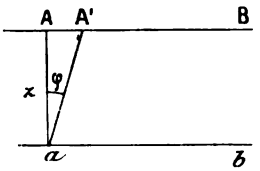
$$\mathfrak{M} = \gamma \frac{d^4}{l}\Theta = \pi K \frac{\Theta}{l}\frac{d^4}{32};$$

d'où l'on déduit

$$(37)\qquad \gamma = \frac{\pi}{32} K.$$

Déformations produites par des forces tangentielles. — Soit dans un milieu indéfini (*fig.* 85) deux plans parallèles,

Fig. 85.



l'un fixe ab, l'autre AB auquel on applique une force tangentielle de valeur f par unité de surface. Il se produit un déplacement : un filet normal aA vient en A' formant avec sa position initiale un angle φ tel que

$$(38)\qquad f = K\varphi,$$

Digitized by Google

K étant un facteur constant qui dépend de la nature du milieu. Si donc z est la distance des deux plans AB et ab, le déplacement AA′, appelé aussi le *glissement*, est tel que

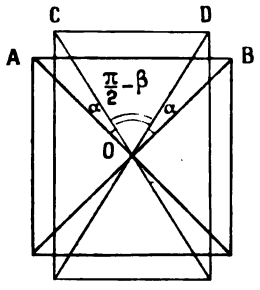
$$(39) \qquad AA' = z \operatorname{tang} \varphi = z\varphi,$$

car l'angle φ est toujours très petit.

Calculer les dilatations ε *à* 45° *de* aA. *Vérifier que* $\Theta = 0$.

Égalité des coefficients K et μ. — Reprenons le problème de la page 221. Sous l'action de la tension normale p par

Fig. 86.



unité de surface, le cube devient un parallélépipède (*fig.* 86) et l'on a (13)

$$\beta = \frac{p}{E}(1 + \sigma).$$

Mais la normale OA a tourné par rapport au plan OB de l'angle $2\alpha = \beta$; on a donc (38)

$$f = K\beta = K\frac{p}{E}(1 + \sigma).$$

Cherchons une autre valeur de f, la force qui a provoqué le glissement parallèlement à OB est $p \cos 45°$; comme elle

Digitized by Google

agit sur une surface $\frac{1}{\cos 45^\circ}$, on a

$$f = \frac{p \cos 45^\circ}{\frac{1}{\cos 45^\circ}} = p \cos^2 45^\circ = \frac{p}{2}.$$

En égalant les deux valeurs de f, il vient

$$(40) \qquad K = \frac{E}{2(1+\sigma)} = \mu.$$

Déduire ce résultat des valeurs ε, ε' *et des formules* (9).

Détermination expérimentale du coefficient μ. — Des formules (37) et (40), on déduit $\gamma = \frac{\pi}{32}\mu$.

On peut donc déterminer expérimentalement le coefficient de rigidité μ : avec la substance que l'on veut étudier, on réalise un fil de diamètre d et de longueur l; on y suspend un solide qui le tend, et l'on fait osciller le système autour du fil comme axe. Si l'amortissement n'est pas excessif, la durée T de la période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{C}}.$$

Or $C = \frac{\pi}{32}\mu\frac{d^4}{l}$ (35), (37) et (40). Donc si l'on a déterminé T, d, l, on aura μ, si l'on connaît le moment d'inertie δ du système. D'où σ si l'on connaît E.

Moment d'inertie des solides usuels. — Même si dans la détermination de μ, on introduit, pour éliminer δ, une deuxième équation, on est toujours ramené à déterminer par le calcul un moment d'inertie. Le problème est plus

Digitized by Google

ou moins compliqué suivant la forme du système et selon qu'il est homogène ou hétérogène. Dans les quelques cas que nous allons examiner, nous supposerons toujours le solide homogène et nous désignerons par ρ sa masse spécifique.

1° *Cylindre de révolution de rayon* R *et de hauteur* h. *Axe* GX *parallèle aux génératrices et passant par le centre de gravité.* — Décomposons le solide en tubes concentriques d'épaisseur dr. La masse du tube de rayon r est

$$2\pi h\rho r\,dr,$$

et son moment d'inertie $d\mathfrak{I}$ par rapport à l'axe est

$$d\mathfrak{I} = 2\pi h\rho r^3\,dr.$$

Pour le cylindre entier de rayon R et de masse $M = \pi R^2 h\rho$, nous aurons

$$(1) \qquad \mathfrak{I} = 2\pi h\rho \int_0^R r^3\,dr = \pi h\rho \frac{R^4}{2} = M\frac{R^2}{2}.$$

Posons

$$\mathfrak{I} = M\mathfrak{R}^2,$$

$\mathfrak{R}$ étant le rayon de giration, nous voyons que

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{R^2}{2}.$$

2° *Cylindre de révolution de rayon* R *et de hauteur* h. *Axe perpendiculaire aux génératrices et passant par le centre de gravité* G. — Soit GZ la droite considérée (*fig.* 87). Traçons l'axe GX du cylindre et la perpendiculaire GY au plan XGZ.

Désignons respectivement par $\mathfrak{I}_{GZ}$, $\mathfrak{I}_{GX}$, $\mathfrak{I}_{XGZ}$ et $\mathfrak{I}_{ZGY}$ les

Digitized by Google

moments d'inertie respectifs du cylindre par rapport aux axes GZ, GX et aux plans XGZ et ZGY.

On a

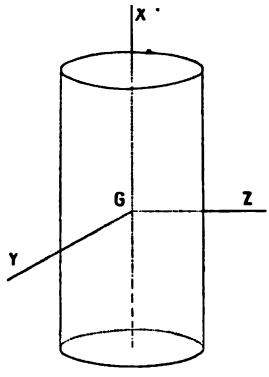
$$\mathfrak{I}_{GX} = \sum dm\left(y^2 + z^2\right) = 2\sum dm.y^2 = 2\mathfrak{I}_{XGZ}$$

et de même

$$\mathfrak{I}_{GZ} = \mathfrak{I}_{ZGY} + \mathfrak{I}_{XGZ} = \mathfrak{I}_{ZGY} + \frac{\mathfrak{I}_{GX}}{2}.$$

$\mathfrak{I}_{GX}$ est connu, reste à calculer $\mathfrak{I}_{ZGY}$. Coupons le cylindre par deux plans perpendiculaires à l'axe GX et situés aux distances x et $x + dx$ du plan YGZ.

Fig. 87.



La tranche obtenue a pour masse

$$\pi R^2 \rho\, dx,$$

et pour moment d'inertie (par rapport au plan YGZ)

$$\pi R^2 \rho x^2\, dx.$$

Digitized by Google

Le moment d'inertie du cylindre entier est donc

$$(2)\qquad \mathfrak{I}_{ZGY} = \pi R^2 \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2\,dx = \rho\pi R^2 \frac{h^3}{12} = M\frac{h^2}{12}.$$

On a donc

$$(3)\qquad \mathfrak{I}_{GZ} = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

3° *Sphère de rayon* R. — Reprenons les notations du problème précédent et soit $\mathfrak{I}$ le moment d'inertie par rapport à G. Par raison de symétrie, G étant le centre de la sphère,

$$\mathfrak{I}_{XGY} = \mathfrak{I}_{XGZ} = \mathfrak{I}_{YGZ}$$

et

$$\mathfrak{I}_{GX} = \mathfrak{I}_{GY} = \mathfrak{I}_{GZ}.$$

De plus, comme $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{XGY} + \mathfrak{I}_{XGZ} + \mathfrak{I}_{YGZ} = 3\mathfrak{I}_{XGY}$$

et

$$2\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{GX} + \mathfrak{I}_{GY} + \mathfrak{I}_{GZ} = 3\mathfrak{I}_{GX}.$$

Pour calculer $\mathfrak{I}$, décomposons le solide en couches sphériques de centre G, d'épaisseur dr.

La masse de la couche de rayon r est

$$4\pi\rho r^2\,dr,$$

et son moment d'inertie $d\mathfrak{I}$ par rapport à G est

$$d\mathfrak{I} = 4\pi\rho r^4\,dr.$$

Pour la sphère entière de rayon R et de masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ nous aurons

$$(4)\qquad \mathfrak{I} = 4\pi\rho\int_0^R r^4\,dr = 4\pi\rho\frac{R^5}{5} = M\frac{3R^2}{5};$$

Digitized by Google

d'où

(5) $$\delta_{GX} = \frac{2}{5} MR^2$$

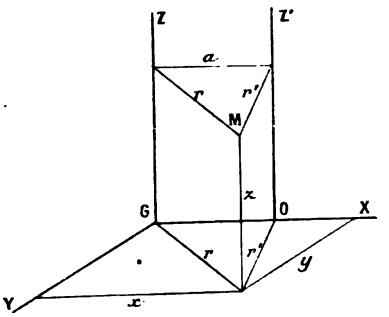
et

(6) $$\delta_{XGY} = \frac{1}{5} MR^2.$$

Nous allons examiner maintenant comment varie le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe lorsque : 1° l'axe conservant sa direction ne passe plus par le centre de gravité G ; 2° l'axe passant par un point fixe O, sa direction change.

Déplacement parallèle de l'axe. — Soit à calculer le moment d'inertie d'un corps de masse M par rapport à l'axe OZ′ parallèle à GZ et situé à une distance a de celui-ci (*fig.* 88).

Fig. 88.



Prenons GX, GY, GZ comme axes rectangulaires de coordonnées GZ et GX se trouvant dans le plan GZOZ′. Si m est la masse d'un point M de coordonnées x, y, z du corps, r et r' les distances respectives à GZ et OZ′, on a

$$I_{GZ} = \Sigma m r^2,$$
$$I_{OZ'} = \Sigma m r'^2.$$

Digitized by Google

Mais

$$r^2 = x^2 + y^2,$$
$$r'^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

de sorte que

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ax;$$

d'où il résulte

$$(7) \qquad \mathfrak{I}_{OZ'} = \Sigma m r^2 + a^2 \Sigma m - 2a \Sigma m x = \mathfrak{I}_{GZ} + M a^2,$$

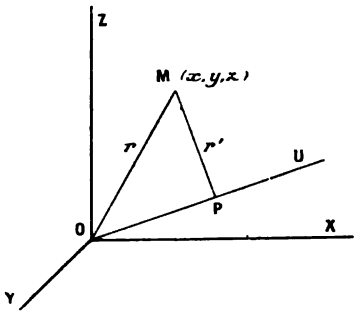
car, G étant le centre de gravité, $\Sigma m x = 0$.

D'où ce théorème dû à Huygens : *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe* OZ' *est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle* GZ *mené par le centre de gravité, plus le produit de la masse totale du corps par le carré de la distance des deux axes considérés.*

Nous voyons de plus que le moment d'inertie ne peut être minimum que si l'axe passe par le centre de gravité G.

Moments pour toutes les droites passant par un point O. — Rapportons le corps à trois axes de coordonnées rectan-

Fig. 89.



gulaires OX, OY, OZ et soit OU une droite, de cosinus directeurs α, β, γ, par rapport à laquelle nous prenons le

Digitized by Google

moment d'inertie δ. Soient M un point du corps, m sa masse, x, y, z ses coordonnées, r et r' ses distances respectives $\overline{MO}$ et $\overline{MP}$ à O et à OU (*fig.* 89).

On a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\overline{OP}^2 = r^2 - r'^2$$

et aussi, par projection du contour des coordonnées de M sur OU,

$$\overline{OP}^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

d'où

$$\begin{aligned} r'^2 = r^2 - \overline{OP}^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz \end{aligned}$$

et, puisque

$$\delta = \Sigma m r'^2,$$

$$\begin{aligned} (8)\quad \delta = \alpha^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m(x^2 + z^2) \\ + \gamma^2 \Sigma m(x^2 + y^2) - 2\alpha\beta \Sigma m xy \\ - 2\alpha\gamma \Sigma m xz - 2\beta\gamma \Sigma m yz. \end{aligned}$$

Portons sur OU la longueur

$$OI = \lambda = \frac{1}{\sqrt{\delta}};$$

les coordonnées du point I sont

$$X = \alpha\lambda,$$
$$Y = \beta\lambda,$$
$$Z = \gamma\lambda.$$

Digitized by Google

et l'équation précédente peut s'écrire

$$(9)\quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DXY - 2EXZ - 2FYZ = 1,$$

en posant

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad D = \Sigma mxy,$$
$$B = \Sigma m(x^2 + z^2), \qquad E = \Sigma mxz,$$
$$C = \Sigma m(x^2 + y^2), \qquad F = \Sigma myz.$$

Si OU varie, le point I décrit une surface S du second degré, et comme cette surface est nécessairement finie d'après la nature même du problème, S est un ellipsoïde dont les axes sont appelés les *axes principaux d'inertie*, relatifs au point O.

Lorsque O est en G, la surface S se nomme *ellipsoïde central d'inertie.*

Remarque. — *Importance pratique du cas où l'ellipsoïde central est une sphère.* — Supposons que, pour déterminer C (p. 246), l'on suspende au fil un cylindre. La valeur calculée de $\mathfrak{I}$ (p. 252) ne convient que si le fil, dont le prolongement passe certainement par G (s'il est assez souple), coïncide rigoureusement avec la direction de l'axe du cylindre ; ce dont on n'est pas certain expérimentalement.

Pour tourner la difficulté, on détermine les dimensions du cylindre de façon qu'une erreur sur la position d'attache du fil n'altère pas la valeur de $\mathfrak{I}$, autrement dit que son moment d'inertie soit le même pour toutes les droites passant par G. Cette condition est réalisée, si l'ellipsoïde central d'inertie est une sphère. Or, par raison de symétrie, l'ellipsoïde est de révolution, d'où $B = C$; il suffit donc que l'on ait

$$A = B,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$\frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \qquad \text{[formules (1) et (3)]}$$

ou

$$h = R\sqrt{3} = 0{,}866\,D, \tag{10}$$

D étant le diamètre du cylindre.

Détermination expérimentale du moment d'inertie d'un solide quelconque par rapport à un axe passant par son centre de gravité G. — Soit à déterminer le moment d'inertie X d'un solide de forme quelconque, homogène ou non. Suspendons-le à un fil de constante de torsion C et faisons osciller le système qui fonctionne comme pendule de torsion. La durée de la période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{X}{C}}.$$

Ajoutons au système, et sans modifier sa position par rapport au fil, un corps dont on puisse calculer le moment d'inertie $\mathfrak{I}$ par rapport au fil. La durée de la nouvelle période est

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{X+\mathfrak{I}}{C}};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{T'^2}{T^2} = 1 + \frac{\mathfrak{I}}{X}$$

et

$$X = \mathfrak{I}\frac{T^2}{T^2 - T'^2}. \tag{11}$$

Si le corps a une forme géométrique et si l'on peut calculer son moment d'inertie X′ par rapport au fil, le procédé

Digitized by Google

précédent permet de vérifier s'il est homogène; on devra obtenir dans ce cas

$$X' = X.$$

Oscillations de torsion. — Le mouvement oscillatoire de torsion a été étudié (p. 71). S'y reporter.

Exercice. — Propriétés des surfaces élastiques à tension tangentielle et normale à l'élément linéaire tracé sur la surface. Comme application, *revision* des phénomènes de capillarité. Courbe élastique et profil des surfaces libres.

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME ÉLASTIQUE.

Définitions et hypothèses. — Un corps est souvent soumis à des forces qui ne sont pas entièrement sous notre dépendance : ainsi la pesanteur applique à la masse $\rho\, dV$ qui occupe le volume dV une force proportionnelle à $\rho\, dV$. A ces forces spontanées, on peut adjoindre des forces arbitraires, dont nous pouvons faire varier la direction et l'intensité.

Admettons qu'un corps soit sollicité par des forces de ces deux catégories, directement appliquées et transmises, et traçons une surface S qui définit dans le corps les deux régions A et B (*fig.* 86). Il est clair que l'on peut rapporter à A les actions transmises à B et que la suppression de A laissera B dans le même état mécanique si l'on a soin d'appliquer aux différents éléments dS de la surface S des actions identiques à celles que A exerçait sur B à travers dS.

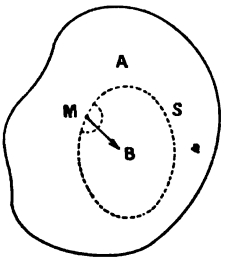
Prenons sur S, autour d'un point M, un élément de surface dS, et admettons que les forces qui traversent dS ont une résultante df dirigée soit vers B (pression), soit vers A (traction), soit tangentiellement à dS (force tangentielle).

Digitized by Google

Ainsi, en hydrostatique, l'action exercée par A sur B, à travers dS, se réduit à une force normale à l'élément.

Admettons enfin que le rapport $\frac{df}{dS}$ tende vers une limite p appelée *tension par unité de surface* au point M,

Fig. 86.



lorsque dS tend vers zéro. Inversement, l'action de B sur A à travers dS est égale et de sens contraire à $p\,dS$.

Soient X, Y, Z les composantes de p. Elles peuvent dépendre : 1° de la position du point M, de coordonnées x, y, z, à l'intérieur du corps; 2° de l'orientation de dS, orientation définie par les cosinus directeurs α, β, γ de la normale en M à dS.

Alors p est en général de la forme

$$p = f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma).$$

En hydrostatique, la pression est simplement fonction des coordonnées du point :

$$p = \varphi(x, y, z).$$

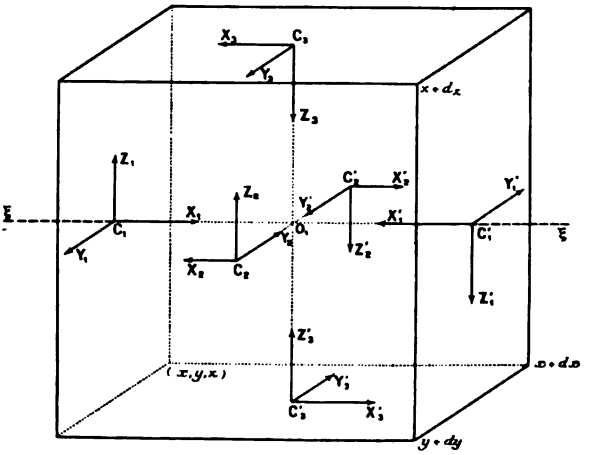
Pour avoir les équations d'équilibre, il faut écrire que B est en équilibre quelle que soit S. Toutes les conséquences relatives à la forme de S seront épuisées lorsque l'on

Digitized by Google

aura pris pour B successivement un parallélépipède et un tétraèdre [1].

Équilibre du parallélépipède élémentaire. — Considérons un parallélépipède élémentaire de dimensions dx, dy, dz, parallèles aux axes des coordonnées. Affectons des indices 1, 2, 3 les faces respectivement perpendiculaires à OX, OY, OZ (*fig.* 87).

Fig. 87.



Les forces appliquées par *unité de surface* aux faces perpendiculaires à OX sont : X_1, Y_1, Z_1 et $X_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x} dx$ $Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial x} dx$; $Z_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial x} dx$; celles appliquées aux faces perpendiculaires à OY : X_2, Y_2, Z_2 et $X_2 + \frac{\partial X_2}{\partial y} dy$, $Y_2 + \frac{\partial Y_2}{\partial y} dy$, $Z_2 + \frac{\partial Z^2}{\partial y} dy$; celles appliquées aux faces perpendiculaires à OZ : X_3, Y_3, Z_3 et $X_3 + \frac{\partial X_3}{\partial z} dz$, $Y_3 + \frac{\partial Y_3}{\partial z} dz$, $Z_3 + \frac{\partial Z_3}{\partial z} dz$.

---

[1] *Voir* P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, p. 126.

Digitized by Google

Le signe à prendre dépend de la face du plan qui intervient. Comme dans le cas de l'équilibre du parallélépipède, il s'agit pour les deux faces correspondantes de côtés différents, l'un des systèmes de composantes, après avoir été déduit de l'autre *par continuité*, devra être changé de signe.

Les projections respectives sur OX, OY, OZ de toutes les forces qui sollicitent le parallélépipède sont donc :

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} + \rho X_e,$$
$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} + \rho Y_e,$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} + \rho Z_e,$$

X_e, Y_e, Z_e désignant les composantes relatives à l'unité de masse du corps considéré des forces directement appliquées (pesanteur, forces magnétiques, etc.).

La première condition d'équilibre s'obtient en écrivant que chacune de ces trois résultantes est nulle, d'où

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} + \rho X_e = 0, \\ &\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} + \rho Y_e = 0, \\ &\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} + \rho Z_e = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations expriment que l'élément de volume ne tend pas à se déplacer parallèlement aux axes. Elles constituent un ensemble de trois relations différentielles auxquelles doivent satisfaire, en tout point du milieu, les neuf composantes $X_1, Y_1, \ldots, Y_3, Z_3$.

Digitized by Google

Écrivons maintenant que le moment des forces pris successivement par rapport à trois axes $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$ parallèles aux arêtes et passant par le point de rencontre O_1 des diagonales du parallélépipède est nul. Par exemple, en prenant le moment des forces par rapport à $O_1\xi$, il vient

$$Z_2\, dz\, dx \frac{dy}{2} + \left(Z_2 + \frac{\partial Z_2}{\partial y} dy\right) dx\, dz \frac{dy}{2}$$
$$- Y_3\, dy\, dx \frac{dz}{2} - \left(Y_3 + \frac{dY_3}{dz} dz\right) dy\, dx \frac{dz}{2} = 0,$$

d'où, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à $dx\, dy\, dz$,

$$Z_2 = Y_3.$$

On aurait de même

$$X_3 = Z_1,$$
$$Y_1 = X_2,$$

ce qui montre que les neuf composantes ne sont pas distinctes et se réduisent à six.

Nous négligeons, dans le raisonnement précédent, l'action de la pesanteur, car elle donne naissance, à l'intérieur de l'élément de volume, à un couple infiniment petit par rapport aux autres, puisque la distance du point O_1 au centre de gravité du parallélépipède est nulle ou infiniment petite par rapport à l'une des quantités dx, dy ou dz.

Forme usuelle des équations d'équilibre. — X_1, Y_2, Z_3 sont des forces normales aux faces sur lesquelles elles agissent et X_2, X_3, Y_1, Y_3, Z_1, Z_2 sont des forces parallèles aux faces ou tangentielles.

Aussi, depuis Lamé, on les désigne par les symboles

Digitized by Google

suivants :

$$N_1 = X_1,$$
$$N_2 = Y_2,$$
$$N_3 = Z_3,$$
$$T_1 = Y_3 = Z_2,$$
$$T_2 = X_3 = Z_1,$$
$$T_3 = Y_1 = X_2.$$

Au tableau des composantes

$$\begin{matrix} X_1, & X_2, & X_3, \\ Y_1, & Y_2, & Y_3, \\ Z_1, & Z_2, & Z_3, \end{matrix}$$

on peut donc faire correspondre le tableau

$$\begin{matrix} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{matrix}$$

symétrique par rapport à la diagonale $N_1 N_2 N_3$ des trois composantes normales; les indices s'obtiennent par permutation circulaire dans le sens des flèches.

Avec ces notations les équations d'équilibre (1) s'écrivent :

$$(2) \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X_e = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \rho Y_e = 0,$$

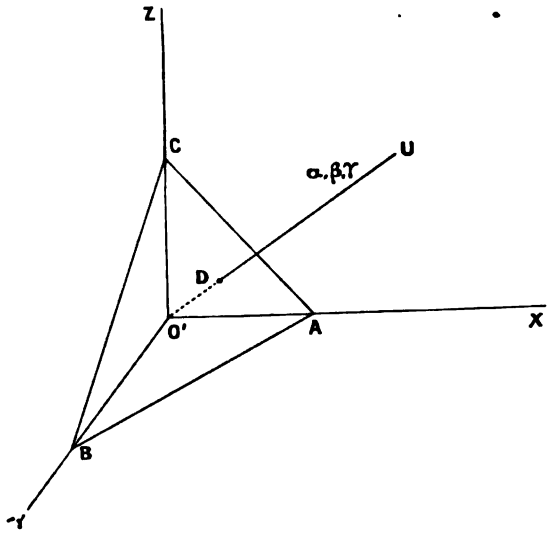
$$(4) \qquad \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho Z_e = 0.$$

Équilibre du tétraèdre élémentaire. — Considérons un tétraèdre trirectangle O'ABC d'arêtes $O'A = dx$, $O'B = dy$,

Digitized by Google

$O'C = dz$ limité par trois plans parallèles aux plans de coordonnées et par la face ABC dont la normale O'U a pour cosinus directeurs α, β, γ (*fig* 88).

Fig. 88.



Soient X, Y, Z les composantes de la force agissant à travers ABC par unité de surface. Si le plan ABC, supposé indéfini, varie en direction, et vient par continuité coïncider avec un des plans de coordonnées, les valeurs de X, Y, Z tendent vers les valeurs des trois composantes relatives à ce plan.

Nous choisirons le sens de X, Y, Z, de manière que, dans ces positions limites, on ait

$$X = N_1, \qquad Y = T_3, \qquad Z = T_2.$$

Ainsi X, Y, Z sont les composantes de la force émanant de l'élément tétraédrique, tandis que N_1, N_2, ..., T_3 concernent

Digitized by Google

les actions de l'extérieur sur l'élément. Écrivons que le système est en équilibre. En égalant les projections de toutes les forces parallèles à chacun des axes, nous avons pour OX

$$N_1 \frac{dy\,dz}{2} + T_3 \frac{dz\,dx}{2} + T_2 \frac{dy\,dx}{2} + \rho X_e \frac{dx\,dy\,dz}{6} = X\,dS.$$

Projetant successivement dS sur les trois autres faces du tétraèdre, nous obtenons trois relations de la forme

$$\alpha\,dS = \frac{dy\,dz}{2}.$$

Remplaçons dans l'équation d'équilibre les produits de la forme $dy\,dz$ par leur valeur en fonction de dS, et simplifions; il vient

$$X = \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2. \tag{5}$$

On obtiendrait de même les deux équations

$$Y = \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1, \tag{6}$$

$$Z = \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3. \tag{7}$$

Ainsi la tension qui agit sur un élément dS pris autour d'un point M dépend de l'orientation de cet élément.

Il est important de retenir que pour les éléments de la surface qui limite le corps considéré, et dans l'état d'équilibre, les composantes X, Y, Z [(5), (6), (7)] sont considérées comme identiques à celles de l'action extérieure s'exerçant par unité de surface au même point. Ces conditions sont dites *équations à la surface*.

Nous devrions encore écrire que les moments sont nuls, mais cela ne nous donnerait rien de nouveau : on retrouverait la réduction à six, des neuf composantes.

Les relations d'équilibre ont la même généralité que les

Digitized by Google

principes de la Mécanique, car la seule hypothèse introduite est que le système des forces qui s'exercent à travers un élément de surface dS se réduit à une force unique. Elles s'appliquent aux corps isotropes ou cristallisés.

Application. — *Cas des fluides.* — On peut déduire de ces équations les lois de l'Hydrostatique en introduisant la condition supplémentaire qui caractérise un fluide parfait, à savoir : deux portions du fluide peuvent glisser l'une sur l'autre sans effort, il n'existe donc pas de force tangentielle et la tension se réduit à une pression normale p.

Les valeurs des composantes X, Y, Z de p sont donc

$$X = \alpha N_1, \qquad Y = \beta N_2, \qquad Z = \gamma N_3.$$

Mais

$$X = -\alpha p, \qquad Y = -\beta p, \qquad Z = -\gamma p,$$

d'où

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p.$$

Ainsi p ne dépend pas de α, β, γ et les équations d'équilibre deviennent :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho X_e, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho Y_e, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho Z_e, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$dp = \rho X_e\, dx + \rho Y_e\, dy + \rho Z_e\, dz.$$

Puisque

$$p = f(x, y, z),$$

Digitized by Google

lorsque dS tourne autour d'un point fixe O, l'extrémité du vecteur P décrit une sphère.

Comme dp est une différentielle totale, on a

$$\frac{\partial(\rho X_e)}{\partial y} = \frac{\partial(\rho Y_e)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho X_e)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z_e)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(\rho Y_e)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho Z_e)}{\partial y},$$

autrement dit ρ est un facteur intégrant de l'expression

$$X_e\,dx + Y_e\,dy + Z_e\,dz.$$

Revision des questions fondamentales de l'hydrostatique.

Nivellement barométrique. (Voir *cinématique et mécanismes; potentiel et mécanique des fluides. Cours de M. H. Poincaré, rédigé par A. Guillet.* p. 294.)

Distribution de la tension en un point. — Revenons au cas général. Puisque

$$p = f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma),$$

faisons varier l'orientation de l'élément dS autour du point O (x, y, z) pris comme origine et cherchons : 1° comment varie la composante normale $\mathfrak{N}$ de la tension relative à cet élément lorsque α, β, γ varient; 2° quel est alors le lieu de l'extrémité de p.

1. *Variation de* $\mathfrak{N}$. — X, Y, Z étant les composantes de la tension, on a

$$\mathfrak{N} = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

ou, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs [formules (5),

Digitized by Google

(6) et (7)]

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = \quad & \alpha(\alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2) \\ & + \beta(\alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1) + \gamma(\alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3)\end{aligned}$$

ou

$$(9) \quad \mathfrak{N} = \alpha^2 N_1 + \beta^2 N_2 + \gamma^2 N_3 + 2\alpha\beta T_3 + 2\alpha\gamma T_2 + 2\beta\gamma T_1.$$

Opérons comme on l'a fait pour les moments d'inertie (p. 257) et portons sur la normale à l'élément une longueur $OM = \lambda$ définie par la relation

$$\lambda^2 \mathfrak{N} = \pm 1,$$

selon le signe de $\mathfrak{N}$.

Les coordonnées x, y, z de M sont alors

$$x = \lambda\alpha, \qquad y = \lambda\beta, \qquad z = \lambda\gamma,$$

et en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs, l'équation (9) devient

$$\begin{aligned}(9') \quad \varphi(x, y, z) = \lambda^2 \mathfrak{N} = N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 \\ + 2T_3 xy + 2T_2 xz + 2T_1 yz = \pm 1.\end{aligned}$$

C'est l'équation d'une surface du second degré qui a reçu le nom de *quadrique directrice;* elle a pour centre le point O.

1° *Si* $\mathfrak{N}$ *a toujours le même signe*, il en est de même de ses valeurs particulières, N_1, N_2, N_3 et la quadrique directrice est un ellipsoïde.

2° *Et si* $\mathfrak{N}$ *change de signe?* Lorsque $\mathfrak{N}$ s'annule et change de signe, il faut alors considérer l'ensemble des quadriques obtenues en égalant le second membre à ± 1. Comme λ devient infini pour $\mathfrak{N} = 0$, ces quadriques à centre sont des

Digitized by Google

hyperboloïdes et le cône assymptote sépare la région où $\mathfrak{N}$ est une traction de celle où $\mathfrak{N}$ est une pression.

Pour les éléments perpendiculaires aux génératrices du cône asymptote on a $\mathfrak{N} = 0$ et la tension se réduit à une force tangentielle. Autrement dit, les éléments pour lesquels n'existent que des forces tangentielles sont tangents au cône supplémentaire du cône asymptote. C'est pourquoi ce cône est appelé *cône de glissement*, bien que le glissement ait lieu dans une direction perpendiculaire.

Conservons O comme origine, et changeons d'axes de coordonnées : $N_1, N_2, \ldots, T_3$ varient et quand les axes de coordonnées coïncident avec ceux de la quadrique directrice, l'équation devient

$$N'_1 x^2 + N'_2 y^2 + N'_3 z^2 = \pm 1,$$

ce qui montre que, pour les trois éléments plans qui coïncident alors avec les plans de coordonnées,

$$T'_1 = T'_2 = T'_3 = 0,$$

c'est-à-dire qu'il existe en chaque point du milieu trois éléments perpendiculaires deux à deux appelés *éléments principaux* et soumis uniquement à des pressions normales.

2. *Ellipsoïde des efforts de Lamé.* — Cherchons maintenant le lieu de l'extrémité M de la tension dont les composantes sont X, Y, Z lorsque α, β, γ varient, le point O restant l'origine des coordonnées.

Si x, y, z sont les coordonnées de M, on a [formules (5), (6) et (7)] :

$$x = \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2,$$
$$y = \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1,$$
$$z = \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3,$$

Digitized by Google

et le lieu de M s'obtient en éliminant α, β, γ entre ces trois équations et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

On arrive ainsi visiblement à une relation de la forme

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$

où P, Q, R sont des polynomes du premier degré en x, y et z. Le lieu de M est donc un ellipsoïde.

En particulier, si l'on prend comme plans de coordonnées les trois éléments principaux, l'équation de l'ellipsoïde des efforts est

$$\frac{x^2}{N_1'^2} + \frac{y^2}{N_2'^2} + \frac{z^2}{N_3'^2} = 1.$$

Détermination de la tension p en un point. — Les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à un élément plan dS étant donnés, cherchons à déterminer la tension qu'il supporte, la quadrique directrice et l'ellipsoïde des efforts étant connus.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = \pm 1$$

l'équation de la quadrique directrice. Le plan diamétral relatif à la direction α, β, γ ayant pour équation

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0,$$

il est perpendiculaire à la direction dont les cosinus sont proportionnels à φ'_α, φ'_β, φ'_γ.

Mais (9')

$$\frac{1}{2}\varphi'_\alpha = \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2 = X,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_\beta = \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1 = Y,$$

$$\frac{1}{2}\varphi'_\gamma = \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3 = Z;$$

Digitized by Google

en conséquence la tension est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction α, β, γ dans la quadrique directrice. Elle est d'ailleurs limitée à l'ellipsoïde de Lamé.

RELATIONS ENTRE LES DÉFORMATIONS EN UN POINT DU MILIEU ET LES (N, T) CONCERNANT CE POINT.

Il nous reste à exprimer, d'une manière générale, les composantes normales et tangentielles en fonction de la déformation du milieu.

Pour obtenir les équations d'équilibre, c'est-à-dire pour projeter les forces et prendre leurs moments, nous avons opéré sur le milieu déformé, afin de pouvoir le considérer comme invariable. Lorsque le milieu élastique passe, sous l'action des forces qui le sollicitent, d'un état initial 1 à un état final 2, un élément parallélipipédique, dont les arêtes sont dans l'état 1 respectivement parallèles aux axes de coordonnées, se déforme et ses faces ne restent pas rectangulaires. Les *dilatations* des arêtes et leur changement de direction ou *glissements* en chaque point déterminent évidemment les N et les T concernant ce point.

Les N, T sont *a priori* des fonctions des six paramètres ainsi obtenus et l'on peut réduire, en première approximation, les développements des six fonctions N, T à leur partie linéaire. On est ainsi conduit à expliciter $6 \times 6 = 36$ coefficients de déformation, indépendants du point (x, y, z) considéré dans le cas d'un milieu *homogène*.

Nous allons donc chercher comment varie l'angle de deux droites Mx' et Mz' respectivement parallèles à OX et OZ, lorsque la déformation se produit, ainsi que la longueur d'un élément initial donné. Ce problème, tout géométrique, est fort simple et d'une très grande fécondité cinématique. Nous nous bornerons à l'immédiat.

Digitized by Google

Détermination des cosinus directeurs d'une droite du milieu après la déformation. — Soit MM_1 une droite qui, après déformation du milieu, est venue en $M'M'_1$. Désignons par x, y, z, et $x+h$, $y+k$, $z+l$ les coordonnées respectives de M et de M_1. Quand la déformation se produit, M vient en M' de coordonnées $x+u$, $y+v$, $z+w$. Cauchy admet, et c'est là l'idée fondamentale qui permet de mettre le problème en équation, que u, v, w sont des fonctions de x, y, z et que pour avoir la composante u_1, du déplacement de M_1, il suffit dans la fonction $u(x, y, z)$ de remplacer x, y, z par $x+h$, $y+k$, $z+l$; d'où

$$u_1 = u(x+h, y+k, z+l).$$

Développons par la formule de Taylor et bornons-nous aux termes du premier degré en h, k et l; il vient

$$u_1 = u(x, y, z) + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Les coordonnées de M'_1 sont donc :

$$x + h + u + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$y + k + v + h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$z + l + w + h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z},$$

et les projections de $M'M'_1$ ont pour expression

$$h\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$h\frac{\partial v}{\partial x} + k\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + l\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Digitized by Google

Mais h, k et l sont les projections de MM_1 sur les axes. En posant

$$MM_1 = ds = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$$

et en désignant par α, β, γ ses cosinus directeurs, il vient

$$\alpha = \frac{h}{ds}, \qquad \beta = \frac{k}{ds}, \qquad \gamma = \frac{l}{ds}.$$

Les projections de $M'M'_1$ peuvent alors s'écrire

$$h' = ds\left(\alpha + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$k' = ds\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$l' = ds\left(\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma + \gamma\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

On a, d'autre part,

$$M'M'_1 = \sqrt{h'^2 + k'^2 + l'^2}.$$

Mais u est un infiniment petit, et ses variations doivent être, elles aussi, très petites; nous pouvons donc négliger les termes où $\frac{\partial u}{\partial x}$ et les quantités analogues figurent par leur carré ou par le produit de deux d'entre elles. Il vient alors, en tenant compte de la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$M'M'_1 = ds\sqrt{1 + 2\left(\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\Sigma\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)}.$$

Comme $M'M'_1$ est de la forme $\sqrt{1 + 2\varepsilon}$, on peut écrire

$$M'M'_1 = 1 + \varepsilon,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire

$$M'M'_1 = ds\left[1 + \Sigma\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} + \Sigma\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$$

En posant la *dilatation*

$$\partial = \frac{M'M'_1 - MM_1}{MM_1},$$

il vient

$$\partial = \Sigma\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} + \Sigma\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Les cosinus directeurs α', β', γ' de $M'M'_1$ sont tels que

$$\alpha' = \frac{h'}{M'M'_1} = \frac{h'}{MM_1(1+\partial)} = \frac{\alpha\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}}{1+\partial}.$$

Comme ∂ est très petit, on a

$$\frac{1}{1+\partial} = 1 - \partial,$$

d'où

$$\alpha' = (1-\partial)\left[\alpha\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right],$$

ou, en développant et négligeant les termes de la forme $\partial\frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\alpha' = \alpha + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \partial\right) + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}.$$

On aurait de même

$$\beta' = \beta + \alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \partial\right) + \gamma\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$$\gamma' = \gamma + \alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \partial\right).$$

Digitized by Google

Comme application cherchons ce que devient après déformation l'angle des deux droites Mx' et Mz' qui, avant la déformation, étaient respectivement parallèles à Ox et Oz.

Pour Mx', nous avons

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \partial_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

et, par conséquent, après déformation

$$\alpha'_x = 1, \qquad \beta'_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \gamma'_x = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Pour Mz', on trouve de même

$$\alpha'_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \beta'_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \gamma'_z = 1.$$

Le cosinus de ces deux droites est

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Si nous désignons par φ_{xz}, la variation de leur angle, qui avant la déformation est $\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{xz}\right) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

On a de même, par permutation circulaire,

$$\varphi_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\varphi_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

En résumé, aux directions d'abord parallèles aux axes et

Digitized by Google

au point x, y, z du milieu correspondent les *trois relations*

$$\partial_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \partial_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \partial_z = \frac{\partial v}{\partial z},$$

déjà obtenues (p. 219) et les trois *glissements* ou distorsions

$$\varphi_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \varphi_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \varphi_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

On exprimera sans difficulté le volume du parallélépipède déformé et la dilatation cubique élastique correspondante.

Introduction dans les équations d'équilibre des dérivées du déplacement u, v, w, des divers points du milieu. — Si la substance est isotrope, nous connaissons (p. 218) les relations qui existent entre les actions normales N_1, N_2, N_3, la dilatation cubique Θ et les composantes u, v, w du déplacement d'un point M de coordonnées initiales x, y, z, dans le cas d'une déformation produite par des actions parallèles aux axes :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ N_2 &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ N_3 &= \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\sigma}$$

et

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Digitized by Google

Pour des glissements définis (p. 249) on a trouvé de même

$$T = \mu.\varphi,$$

d'où l'on déduit (p. 278)

$$(11) \qquad T_1 = \mu\varphi_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

et deux formules analogues pour T_2 et T_3.

Cas général. — *Aperçu sur la méthode de réduction des coefficients.*

Nous avons vu que dans le cas général, et pour un milieu *homogène*, les relations linéaires et homogènes entre les (N'T) et les (∂, φ), que nous désignerons par (I), comportent 36 *constantes*. Il serait intéressant de rechercher comment l'introduction progressive *d'éléments de symétrie* réduit le nombre de ces coefficients, toutefois nous nous bornerons à indiquer les bases de cette discussion, qui ne présente pas d'autres difficultés que des longueurs d'écriture.

On peut partir de la considération des deux surfaces attachées à chacun des points O du milieu : la *surface directrice* (p. 270) et aussi la *surface des dilatations* dont l'équation est immédiate; on a établi plus haut que la dilatation ∂, relative à la direction α, β, γ, a pour mesure :

$$\partial = \Sigma\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} + \Sigma\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Si donc on porte, avec Cauchy, dans la direction α, β, γ une longueur $\rho = \frac{1}{\sqrt{\pm\partial}}$, on obtiendra un point de coordonnées $x = \alpha\rho$, $y = \beta\rho$, $z = \gamma\rho$ et pour le lieu de ce point,

Digitized by Google

lorsque α, β, γ varient, la surface

$$\Sigma x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \Sigma yz \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \pm 1,$$

$$\Sigma x^2 \partial_x + \Sigma yz \varphi_{zy} = \pm 1.$$

Connaissant les équations $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ de la surface directrice et de la surface de dilatation par rapport à un premier système d'axes rectangulaires M, x, y, z, on obtiendra, par le jeu classique des formules de transformation de coordonnées, les équations $S'_1 = 0$, $S'_2 = 0$ de ces mêmes surfaces par rapport à un second système d'axes rectangulaires M, x', y', z'. Les coefficients des carrés et des rectangles formés avec x', y', z' font connaître, d'une part, les (N', T') en fonction des (N, T), et des cosinus directeurs des axes variables, et de même les (∂', φ') en fonction des (∂, φ), d'autre part. D'ailleurs les hypothèses faites sur la structure du milieu, sur sa symétrie, fournissent des données sur la forme que doivent prendre les relations (I') entre les (N', T') et les (∂', φ') lorsque l'on y remplace les N', T') et les (∂', φ') par leurs expressions en (N, T) et en (∂, φ). La réduction du nombre des coefficients résulte des conditions mêmes qui expriment que la forme imposée est obtenue.

On choisit, autant que cela se peut, des systèmes d'axes en relation simple avec le système primitif. Supposons, par exemple, que le plan XOY est un plan de symétrie du milieu, rien ne devra changer si l'on remplace l'axe OZ par l'axe OZ', on obtiendra alors les équations $S'_1 = 0$, $S'_2 = 0$ relatives à ce nouveau système d'axes en remplaçant z par $-z$ dans les équations $S_1 = 0$, $S_2 = 0$; rien ne changera dans ces équations si ce n'est le signe des coefficients qui portent sur les termes dans lesquels z figure au premier

Digitized by Google

degré, mais les coefficients deviennent respectivement les valeurs des (N', T') d'une part et de (∂', φ') d'autre part.

En conséquence :

$$N'_1 = N_1; \qquad N'_2 = N_2; \qquad N'_3 = N_3$$
$$T'_3 = T_3; \qquad T'_2 = -T_2; \qquad T'_1 = -T_1$$

De même

$$\partial'_x = \partial_x; \qquad \partial'_y = \partial_y; \qquad \partial'_z = \partial_z$$
$$\varphi'_{xy} = \varphi_{xy}; \qquad \varphi'_{yz} = -\varphi_{yz}; \qquad \varphi'_{zx} = -\varphi_{zx}$$

Or, puisqu'il y a symétrie par rapport au plan commun YOZ, les relations qui donnent les (N', T') en fonction des (∂', φ') doivent coïncider avec celles qui donnent les (N, T) en fonctions des (∂, φ) après substitution dans les premières des valeurs des (N', T') et des (∂', φ'). Cela exige que les coefficients de φ_{xz} et de φ_{yz} dans les expressions des N et de T_3 soient nuls et que les coefficients des ∂ et de φ_{xy} soient nuls dans les expressions de T_1 et T_2, d'où la disparition de 16 coefficients.

On verra, de même, que si en même temps que XOY le plan YOZ est aussi un plan de symétrie, les N' ne sont plus fonctions que des ∂_x, ∂_y, ∂_z et les T de la seule distorsion qui leur correspond, il ne reste plus alors que 12 coefficients.

Dans le cas de l'isotropie, la réduction précédente est évidemment acquise, car un plan quelconque peut être considéré comme un plan de symétrie ; d'autre part, le coefficient des φ dans l'expression des T est nécessairement le même puisque rien ne distingue physiquement les plans choisis ; pour cette même raison, les coefficients des deux ∂ qui jouent le même rôle dans l'expression des N sont égaux, un *troisième* coefficient est relatif au ∂ isolé. On pourrait réduire à *deux*

Digitized by Google

coefficients en faisant un changement d'axes général; mais il suffit de remarquer que les formules à trois coefficients doivent s'appliquer aux cas particuliers de la traction, et de la torsion étudiés plus haut pour aboutir finalement au système des équations (10) et (11).

Équations d'équilibre en fonction des déformations. — *Cas des milieux isotropes.* — Dans les équations d'équilibre [formules (2), (3) et (4)] remplaçons N_1, N_2, ..., T_2, T_3 par leurs valeurs en fonction des déformations [formules (10) et (11)]. Il vient pour la première

$$\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+\rho X_e=0,$$

ou, en posant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta(u)$,

$$\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\,\Delta(u)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\rho X_e=0$$

ou encore

$$(12)\qquad (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\,\Delta(u)+\rho X_e=0.$$

On aurait de même

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\,\Delta(v)+\rho Y_e=0,\\&(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\,\Delta(w)+\rho Z_e=0.\end{aligned}\right.$$

Telles sont les trois relations d'équilibre auxquelles doivent satisfaire, à l'intérieur du corps, les trois composantes u, v, w

Digitized by Google

du déplacement d'un point. Il faut de plus que les conditions à la surface (p. 267) soient vérifiées.

Exercice. — *Équilibre d'élasticité d'une couche sphérique, ou cylindrique, soumise sur ses deux faces à une pression uniforme* (en vue de l'étude expérimentale de la compressibilité des liquides).

MOUVEMENT DANS LES MILIEUX ÉLASTIQUES ISOTROPES.

Équations du mouvement. — A quelles conditions doivent satisfaire nécessairement les composantes u, v, w, considérées comme fonction de x, y, z et du temps t, pour pouvoir être des déplacements compatibles avec les liaisons élastiques?

D'après le principe de d'Alembert, pour avoir les équations du mouvement d'un corps, il suffit d'écrire les conditions d'équilibre, en supposant que le corps est soumis aux forces qui lui sont appliquées et, de plus, aux forces d'inertie. Il suffit donc de remplacer, dans les trois équations d'équilibre précédentes (12) et (13), $\rho X_e, \ldots$ par

$$\rho\left(X_e - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \quad \ldots,$$

et il vient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta(u) + \rho X_e = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\Delta(v) + \rho Y_e = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu\Delta(w) + \rho Z_e = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\right.$$

En général, les forces dues à l'élasticité sont notablement

Digitized by Google

plus grandes que les forces spontanées ; c'est pourquoi très souvent dans les équations précédentes on supprime les termes ρX_e, ρY_e, ρZ_e.

Remarque. — On peut écrire les équations (14) sous une autre forme qui fait apparaître les dérivées partielles de Θ, u, v, w et met en évidence des binomes, différences de deux dérivées, que l'on rencontre constamment dans un certain nombre de théories.

Reprenons par exemple l'équation

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta(u)+\rho X_e=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

ajoutons et retranchons $\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}$ au premier membre, il vient

$$(15)\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+\rho X_e=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou

$$(16)\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\rho X_e=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nous voyons s'introduire les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Ces différences, considérées comme liées aux composantes d'un certain vecteur, mènent facilement à la théorie des tourbillons.

Et c'est la transition par laquelle on peut passer de l'élasticité à la théorie des champs de vecteurs.

Digitized by Google

Cas particulier. — Supposons que u, v, w soient respectivement les dérivées partielles par rapport à x, y et z d'une certaine fonction $\psi(x, y, z)$.

Dans ce cas les différences

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}$$

sont identiquement nulles. Alors les équations du mouvement se simplifient et deviennent

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \rho X_e = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \rho Y_e = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \rho Z_e = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right.$$

MOUVEMENTS PAR ONDES PLANES COMPATIBLES AVEC LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE, HOMOGÈNE ET ISOTROPE.

I. **Déplacement longitudinal.** — Un milieu homogène et isotrope peut prendre un mouvement tel que tous les points d'un plan perpendiculaire à une direction OX aient à chaque instant un déplacement rectiligne perpendiculaire à ce plan.

Le mouvement du point étant parallèle à OX, on a

$$v \equiv 0, \qquad w \equiv 0,$$

et il en est de même des dérivées de v et w.

La première des équations (14) du mouvement se réduit à

$$(18) \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

si l'on ne tient pas compte des forces directement appliquées

Digitized by Google

ordinairement négligeables devant les forces mises en jeu par les phénomènes élastiques.

Et nous sommes amenés à une équation aux dérivées partielles du second ordre, d'une forme analogue à celle obtenue (p. 36). Tout déplacement rectiligne $u(x, t)$ satisfaisant à la relation (18) sera donc compatible avec les liaisons imposées.

II. **Déplacement transversal**. — Cherchons si le mouvement peut s'opérer dans le milieu par plans parallèles, les points de chaque plan effectuant leur mouvement dans ce plan.

Prenons comme axe OX, la perpendiculaire à la série de plans parallèles considérés. D'après la liaison imposée, le plan restant fixe

$$u \equiv 0,$$

ainsi que toutes ses dérivées.

Si tous les points d'un plan sont animés du même mouvement, v et w ne dépendent que de x, d'où

$$\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0.$$

Alors

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

il n'y a donc pas de dilatation cubique dans un tel mouvement.

Les deux dernières équations du mouvement (14) se réduisent à

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{19}$$

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Digitized by Google

Nous retrouvons encore deux équations qui sont de la même forme que (18). Tous les mouvements dont les composantes v et w répondent aux deux relations précédentes sont possibles, mais nous verrons qu'ils ne sont pas tous réalisés physiquement.

Résolution de l'équation (1) $e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. — Par un changement de variables on peut ramener l'équation proposée à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = 0, \tag{21}$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f(z),$$

d'où

$$u = \varphi(y) + \psi(z);$$

u est donc la somme de deux fonctions arbitraires, l'une de y et l'autre de z. Le fait pour u d'être solution de (1) laisse les fonctions arbitraires et n'intervient que dans la manière de répartir les deux variables x et t.

Pour ramener l'équation

$$e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

à la forme (21), prenons deux nouvelles variables y et z liées aux anciennes x et t par les relations linéaires

$$y = ax + bt,$$
$$z = cx + dt,$$

où les coefficients a, b, c, d sont indéterminés.

Digitized by Google

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Mais

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = c,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z},$$

et en dérivant une seconde fois,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}$$

ou

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2ac\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

On aurait de même :

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2bd\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

L'équation primitive

$$e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

devient, en y remplaçant $e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ par leurs valeurs tirées de (22) et (33),

$$(24) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(ea^2 - \rho b^2) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(eac - \rho bd) + (ec^2 - \rho d^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Pour ramener l'équation (24) à la forme (1) nous laissons $eac - \rho bd \neq 0$ et profitons de l'indétermination de a, b, c, d pour annuler les coefficients de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et de $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Digitized by Google

On a donc

$$(25) \qquad ea^2 = \rho b^2,$$

$$(26) \qquad ec^2 = \rho d^2;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$e^2 a^2 c^2 - \rho d^2 b^2 = (eac + \rho bd)(eac - \rho bd) = 0,$$

d'où

$$(27) \qquad eac + \rho bd = 0,$$

puisqu'il faut

$$eac - \rho bd \neq 0.$$

Si e et ρ sont deux nombres positifs, comme cela se présente dans les équations de l'élasticité, nous pouvons poser

$$V^2 = \frac{e}{\rho},$$

et (27) devient

$$bd + V^2 ac = 0,$$

bd et ac sont donc de signes contraires. Mais, d'après (25) et (26),

$$\frac{e}{\rho} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2},$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{\frac{e}{\rho}} = V = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{d}{c},$$

et nous devons prendre

$$(28) \qquad b = \quad aV,$$

$$(29) \qquad d = -cV.$$

Ainsi l'équation (24) est ramenée à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = 0$$

Digitized by Google

et nous savons que

$$u = f_1(y) + f_2(z).$$

Remplaçons y et z par leurs valeurs, il vient

$$u = \varphi(ax + bt) + \psi(cx + dt)$$

ou, d'après (28) et (29),

$$u = \varphi a(x + Vt) + \psi c(x - Vt).$$

Applications : 1° **Ondes longitudinales.** — L'équation à intégrer est

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Par suite

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{30}$$

Donc à la condition de prendre comme groupes de variables $x + Vt$ *et* $x - Vt$ et de les faire figurer dans deux fonctions arbitraires distinctes, la somme u de ces deux fonctions représentera une fonction du temps qui pourra être la loi du mouvement rectiligne du point M, d'abscisse x, parallèlement à OX.

2° **Ondes transversales.** — Des deux équations (19) et (20) résulte

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{31}$$

On a encore simultanément deux solutions v et w qui présentent le même degré d'arbitraire que u dans le problème précédent. Le mouvement peut donc s'opérer dans le plan d'une infinité de manières, il n'est plus forcément rectiligne.

Digitized by Google

Propagation des déplacements. — Remarquons tout d'abord que V et V′ ont les dimensions d'une vitesse. En effet [p. 217, formules (7) et (8)],

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)},$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\sigma}$$

et σ est le rapport de deux longueurs; donc λ, μ et $\lambda + 2\mu$ ont les mêmes dimensions que E, c'est-à-dire $[ML^{-1}T^{-2}]$. La masse spécifique ρ est de la forme $[ML^{-3}]$. La formule des dimensions de V et V′ est

$$\left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}\right]^{\frac{1}{2}} = LT^{-1}.$$

Il est donc possible de considérer le mouvement dont le milieu est le siège comme s'il provenait de la propagation du mouvement à partir de l'un des plans P d'abscisse x.

Pour un plan P_0, supposons le mouvement déterminé par la relation

$$u_0 = \varphi(x_0 + Vt)$$

et considérons un autre plan P_1 d'abscisse x_1; son mouvement est

$$u_1 = \varphi(x_1 + Vt).$$

Examinons P_0 au temps t_0 et P_1 à l'époque t_1. Le mouvement sera le même si

$$x_0 + Vt_0 = x_1 + Vt_1$$

ou

$$t_0 = t_1 + \frac{x_1 - x_0}{V} = t_1 + \tau.$$

en posant

$$\tau = \frac{x_1 - x_0}{V}.$$

Digitized by Google

Pour $x_1 > x_0$, on peut dire qu'à l'époque $t_1 + \tau$ nous retrouverons sur le plan P_0 le mouvement qui, à l'instant t_1, existait sur P_1. Comme équivalence de langage, on peut dire que u_0, à l'époque t_1, est le déplacement u_1 transporté en x_0 tel qu'il est, non à l'instant t_1, mais à un instant t'_0 lié à t_1 par la relation

$$t'_0 = t_1 - \tau = t_1 + \frac{x_0 - x_1}{V},$$

car au temps t'_0, la nouvelle valeur u'_1 de u_1 est

$$\begin{aligned} u'_1 &= \varphi[x_1 + V(t_1 - \tau)] \\ &= \varphi\left[x_1 + V\left(t_1 - \frac{x_1 - x_0}{V}\right)\right] = \varphi[x_0 + V t_1], \end{aligned}$$

qui est précisément la valeur de u_0 à l'instant t_1.

Mais τ est le temps que mettrait un mouvement se propageant avec la vitesse V à franchir la distance qui sépare les deux plans P_1 et P_0. Tout se passe donc comme si le mouvement se transmettait de P_1 dans le sens négatif ($x_1 > x_0$) avec la vitesse V. Un observateur regardant P_1 et se déplaçant avec la vitesse V dans le sens négatif verrait toujours devant lui le même déplacement. La propagation se trouve donc exprimée par le fait que u est mis sous la forme

$$u = f(x \pm V t).$$

Nous pouvons recommencer le même raisonnement en partant de $\psi(x_0 - Vt)$: le mouvement se propage alors dans le sens positif avec la vitesse V.

Le mouvement général est la superposition de deux mouvements plans se propageant en sens inverses avec des vitesses égales.

La notion de vitesse de propagation du mouvement que nous venons de voir apparaître peut être étendue à la dilatation Θ.

Digitized by Google

En effet,

$$u = \psi(x + Vt) + \varphi(x - Vt),$$

et, par suite,

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} = \psi'_x(x + Vt) + \varphi'_x(x - Vt).$$

Θ, ainsi que u, est la somme de deux fonctions arbitraires contenant l'une le groupement $x + Vt$, l'autre $x - Vt$; il en résulte que l'on peut considérer Θ comme se propageant avec la même vitesse que u.

Remarque. — Si le mouvement présente dans le plan P_0 une périodicité dans le temps, l'existence de V impose une périodicité dans l'espace.

En effet, si T est la durée de la période du mouvement dans le plan P_0, d'abscisse x_0, le mouvement y sera le même aux instants t, $t + T$, ..., $t + nT$.

D'après la définition de V aux époques $t + T, \ldots, t + nT$, le mouvement sera le même dans le plan P_1 d'abscisse $x_1 = x_0 + VT = x_0 + \lambda$, que dans le plan P_0 aux instants $t, \ldots, t + (n - 1)T$. Par suite, dans tous les plans parallèles à P_0 et distants de $\lambda = VT$, le mouvement sera à chaque instant le même que sur P_0.

Cette distance $\lambda = VT$ s'appelle la *longueur d'onde*.

On voit que λ dépend du milieu par l'intermédiaire de V et de la vibration par la durée de la période T.

Ainsi, dans l'eau, la longueur d'onde λ relative au la_3 est

$$\lambda = 1435 \times \frac{1}{435} = 3^m,2,$$

et dans l'air

$$\lambda = 340 \times \frac{1}{435} = 0^m,78.$$

Digitized by Google

Nous avons vu (p. 24) qu'un mouvement de période T peut se représenter par une somme en nombre fini ou infini de sinus de périodes $\frac{T}{2}, \ldots, \frac{T}{n}$.

L'étude d'un mouvement à la fois périodique dans le temps et dans l'espace se ramène donc à celle de

$$u = a \sin b(x - Vt),$$

dont la période T est

$$T = \frac{2\pi}{bV},$$

de sorte que u peut s'écrire, en introduisant T et λ,

$$\begin{aligned} u &= a \sin 2\pi \left[\frac{x}{VT} - \frac{t}{T}\right] \\ &= a \sin 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right] = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}[x - Vt]. \end{aligned}$$

Quand on examine le mouvement entretenu des sources acoustiques, on constate qu'il est sensiblement sinusoïdal.

Remarque. — La solution

$$u = \varphi[a(x + Vt)] + \psi[c(x - Vt)]$$

conduit à définir une *correspondance* entre deux systèmes (a, c, x, t), (a', c', x', t') au moyen du déplacement u considéré comme se propageant avec une vitesse constante V. On a, aux lieux et aux époques correspondantes,

$$\alpha(x + Vt) = x' + Vt',$$
$$\beta(x - Vt) = x' - Vt',$$

en posant

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \ \beta = \frac{c}{c'},$$

Digitized by Google

d'où, pour deux lieux relatifs à une même époque t,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(x_1 - x_2) = x'_1 - x'_2$$

et, pour deux époques relatives à un même lieu,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}(t_0 - t_2) = t'_1 - t'_2.$$

Pour $\alpha = \beta = 1$, la distance est conservée. Il en est de même pour les temps.

Exercice. — *Établir que, dans le cas où une déformation sphérique est substituée à une déformation plane, le déplacement u à la distance x du centre de la sphère est défini par l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{x}\right).$$

Intégrer et discuter.

Cas particuliers de propagation de mouvement.

I. Propagation d'un déplacement longitudinal dans une tige solide cylindrique. — Considérons, dans la tige cylindrique de section droite S et de masse spécifique ρ, une tranche d'épaisseur dz limitée par deux plans P et P′ normaux aux génératrices, située à la distance z d'un plan parallèle à P pris pour origine.

Tous les points de P sont à chaque instant animés du même mouvement; à l'instant t leur ordonnée commune est donc

$$z + w.$$

Digitized by Google

Pour les points du plan P′, elle sera

$$z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

l'épaisseur de la tranche à l'instant t est donc

$$dz\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

L'allongement de dz étant $\frac{\partial w}{\partial z} dz$, l'allongement par unité de longueur est

$$\frac{\partial w}{\partial z}$$

et par suite (définition du module d'Young), la force agissant sur P par unité de surface est

$$N_3 = E\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Sur P′ agit la force

$$N_3 + \frac{\partial N_3}{\partial z} dz = E\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz\right).$$

Ces deux forces étant de sens contraire, la force résultante agissant sur la tranche considérée de masse $S\rho\, dz$ a pour mesure

$$SE\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz$$

et l'équation du mouvement est

$$\rho S\, dz \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz$$

ou en simplifiant

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Digitized by Google

La vitesse de propagation du mouvement est alors

$$V_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{32}$$

Remarque. — Quand une onde plane longitudinale se propage dans un milieu indéfini, sa vitesse est

$$V = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}.$$

On passe de V_2 à V en remplaçant le module d'Young E par le coefficient d'élasticité E′ relatif au milieu indéfini (p. 224).

Dans le problème de la corde vibrante (p. 36) où l'élasticité n'intervient pas, on arrive à l'équation

$$\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où σ est la masse de l'unité de longueur du fil. Si s est la section et ρ la masse spécifique du fil, on a

$$\sigma = \rho s,$$

et l'équation devient

$$\rho s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La vitesse de propagation de ce mouvement transversal est

$$V_3 = \sqrt{\frac{P}{\rho s}}. \tag{33}$$

II. Propagation d'une torsion dans un fil cylindrique. — Dans le cylindre de rayon R et de masse spécifique ρ, considérons à la distance z de la section droite origine une tranche

Digitized by Google

d'épaisseur dz limitée par deux plans P et P′ perpendiculaires à l'axe.

Soit Θ la torsion à la distance z; à la distance $z + dz$ elle est $\Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial z} dz$ et par suite la torsion par unité de longueur a pour valeur

$$\Theta_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Mais (p. 249 et 251) le moment $\mathfrak{M}$ appliqué à la section d'abscisse z a pour expression

$$\mathfrak{M} = \mu \frac{\pi}{2} R^4 \Theta_1.$$

Donc

$$\mathfrak{M} = \mu \frac{\pi}{2} R^4 \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

et le moment résultant dû à la torsion et supporté par la tranche dz est

$$\Delta \mathfrak{M} = \mu \frac{\pi}{2} R^4 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} dz.$$

$\mathfrak{I}$ étant le moment d'inertie de la tranche par rapport à l'axe du cylindre, l'équation qui relie Θ à z et au temps est

$$\mathfrak{I} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{M}.$$

Comme $\mathfrak{I} = \frac{\pi R^4}{2} \rho\, dz$ [formule (1) (p. 252)], il vient

$$\frac{\pi R^4}{2} \rho\, dz \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \mu \frac{\pi}{2} R^4 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} dz,$$

ou, en simplifiant,

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}.$$

Digitized by Google

La vitesse de propagation d'une torsion dans ce fil est donc

$$V_4 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{34}$$

et nous remarquons que $V_4 = V_1$ (p. 290).

Application numérique. — Posons

$$E = 20\,000, \qquad \sigma = \frac{1}{3}, \qquad \rho = 8.$$

On a

$$V_2 = \frac{1}{2}\,10^4\sqrt{9810} = 495\,227 \text{ cm : s} = 4952{,}57 \text{ m : s},$$

$$V = V_2\sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} = V_2\sqrt{\frac{3}{2}} = 6065{,}25 \text{ m : s},$$

$$V_1 = V_4 = V_2\sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)}} = V_2\sqrt{\frac{3}{8}} = 3032{,}63 \text{ m : s}.$$

Manifestation de la propagation d'un mouvement dans les solides. — La vitesse de propagation correspond à une réalité physique : on peut la mettre en évidence par bien des expériences. Nous n'en citerons que deux.

I. Des billes d'ivoire suspendues verticalement par des fils sans rigidité sont tangentes entre elles et ont leurs centres en ligne droite. On écarte la bille placée à l'une des extrémités et on la laisse retomber. Toutes les sphères intermédiaires restent immobiles, seule la bille placée à l'autre extrémité se déplace. Les billes se sont transmises, de l'une à l'autre, l'énergie que possédait la première.

II. Deux billes A et B sont tangentes aux deux bases d'une tige cylindrique tenue en son milieu dans un support,

Digitized by Google

port, on écarte A et on la laisse retomber, le mouvement se propage dans la tige et B se déplace.

III. Propagation dans les fluides. — Pour étudier la propagation du mouvement dans les fluides, nous partirons du coefficient de compressibilité β qui se présente naturellement à l'esprit, puisque E, σ, et par suite λ et μ, ne peuvent être définis que pour les solides.

Soit une masse m d'un fluide occupant aux pressions p_0 et p les volumes respectifs v et v_0.

Par définition

$$v - v_0 = \Delta v = -\beta(p - p_0)v_0 = -\beta\Delta p v_0,$$

car si

$$\Delta p > 0, \qquad \Delta v < 0.$$

Comme la dilatation cubique Θ a pour valeur

$$\Theta = \frac{\Delta v}{v_0}, \tag{35}$$

il vient

$$\Delta p = -\frac{\Theta}{\beta}. \tag{36}$$

Donc $N_1 = N_2 = N_3 = -\frac{\Theta}{\beta}$ et $T_1 = T_2 = T_3 = 0$, car du fait que deux portions d'un fluide peuvent glisser l'une sur l'autre sans effort, il n'y a pas de forces tangentielles.

Les équations (p. 265) s'écrivent alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial x} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial y} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{\beta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Digitized by Google

en négligeant, comme nous l'avons fait dans le cas des solides, les forces directement appliquées, c'est-à-dire les termes ρX_e, ρY_e, ρZ_e et y introduisant les forces d'inertie.

Les fluides ne peuvent pas propager d'ondes à déplacement transversal. — En effet, prenons OX comme sens de propagation. Nous avons vu (p. 286) que, pour les ondes planes à déplacement transversal, on a

$$u \equiv 0$$

et qu'il en est de même pour toutes les dérivées de u.

De plus,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0;$$

par suite,

$$\Theta \equiv 0,$$

et les deux dernières équations (37) se réduisent à

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho Y_0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho Z_0.$$

Si l'on introduit la pesanteur comme force directement appliquée, ces deux équations nous donnent simplement la loi de la chute des corps.

Un fluide ne peut donc propager d'onde transversale : cela tient simplement à ce qu'il ne peut exister à son intérieur de forces tangentielles.

Propagation longitudinale. — Comme

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x},$$

Digitized by Google

la première des équations (37) se réduit à

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

et la vitesse de propagation a pour expression

$$V = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho}}. \tag{38}$$

Application aux gaz. — Ce cas est particulièrement intéressant, il a été le premier et le plus complètement étudié, car on possède plusieurs formes de la fonction caractéristique reliant la pression p, le volume v et la température absolue T du gaz dont on peut déduire facilement les coefficients qui interviennent dans la propagation.

Propagation isotherme. — La fonction caractéristique est alors

$$pv = RT,$$

qui par différentiation donne, la température étant constante,

$$p\,dv + v\,dp = 0$$

ou

$$dp = -\frac{dv}{v}p.$$

Mais [formules (36) et (35)]

$$dp = -\frac{\theta}{\beta}$$

et

$$\theta = \frac{dv}{v},$$

donc

$$\beta = \frac{1}{p}.$$

Digitized by Google

et la vitesse de propagation a pour expression [formule (38)]

$$V_t = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \qquad \text{(formule de Newton).}$$

Remarque. — En mesurant la pression p du gaz en colonne du même fluide, il vient

$$p = h\rho g$$

et

$$V = \sqrt{2\frac{h}{2}g}.$$

Ainsi, dans le cas de la propagation isotherme, la vitesse est la même que celle acquise par un corps pesant qui tomberait de la hauteur $\frac{h}{2}$, h étant la colonne de fluide qui produirait la pression p.

Influence de la température. — t désignant la température, on a

$$p_0 v_0 (1 + \alpha t) = pv.$$

Mais

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}(1 + \alpha t);$$

par suite,

$$V_t = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}\sqrt{1 + \alpha t} = V_0\sqrt{1 + \alpha t} = V_0\sqrt{\alpha T}.$$

La vitesse de propagation isotherme est donc proportionnelle à la racine carrée de la température absolue.

Influence de la densité. — Dans deux gaz pris à la même pression et à la même température on a, pour vitesse de

Digitized by Google

propagation,

$$V_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}},$$

$$V'_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\rho'_0}}.$$

On en déduit

$$V_0 \sqrt{\rho_0} = \text{const.}$$

On a encore

$$\frac{V_0}{V'_0} = \sqrt{\frac{\rho'_0}{\rho_0}},$$

si donc le premier gaz est l'air, $\frac{\rho'_0}{\rho_0}$ est la densité du deuxième gaz, et l'on a

$$\frac{V_0}{V'_0} = \sqrt{\delta}.$$

Influence de l'état hygrométrique. — Soient p la force élastique totale donnée par le baromètre, F_t la tension maxima de la vapeur d'eau à la température t considérée, e l'état hygrométrique; la vitesse de propagation est

$$V = V_0 \sqrt{1 + \alpha t} \frac{1}{\sqrt{1 - 0,378 \frac{eF}{p}}}.$$

Propagation adiabatique. — La formule de Newton donne, pour V à 0° et sous la pression 76^{cm},

$$V_{0,t} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} = 279,9 \text{ m : s};$$

or, des expériences du P. Mersenne, on déduit 380^{m} par seconde; l'écart fut attribué par Newton aux poussières en suspension dans l'air.

Digitized by Google

L'Académie des Sciences ayant trouvé $V_0 = 332^m$, Laplace pensa que l'onde sonore modifie la température du milieu qu'elle traverse et que la compression étant très rapide, il fallait substituer l'élasticité adiabatique à l'élasticité isotherme dans la formule qui détermine la valeur de V.

Dans de telles conditions, l'équation caractéristique du gaz est

$$pv^\gamma = \text{const.};$$

d'où, par différentiation,

$$dp = -\frac{dv}{v} p\gamma.$$

Mais [formules (36) et (35)]

$$dp = -\frac{\Theta}{\beta} \qquad \text{et} \qquad \Theta = \frac{dv}{v}$$

on a donc

$$\frac{1}{\beta} = p\gamma,$$

et la vitesse V_a de propagation du son devient

$$V_a = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}\gamma},$$

d'où

$$V_{ad} = V_{is}\sqrt{\gamma}.$$

A 0° et 76^{cm} de pression on trouve, en prenant $\gamma = 1,40$,

$$V_{0,a} = 332^m,40,$$

et à t degrés

$$V_t = V_{0,a}\sqrt{1 + \alpha t}.$$

IV. Propagation d'un ébranlement électrique le long d'un conducteur doué de capacité et de self-induction. — On a vu (p. 84) comment la décharge d'un condensateur est

Digitized by Google

réglée par une équation de même forme que celle qui définit le mouvement d'un pendule amorti. L'analogie se poursuit plus loin : la propagation d'une perturbation électrique le long d'un fil peut, dans certaines conditions, être régie par une équation analogue à l'équation de la propagation d'une perturbation élastique dans une tige.

Considérons, en effet, à la distance x de la section droite prise pour origine, une tranche d'épaisseur dx limitée par deux sections droites P et Q. Soient V le potentiel et I l'intensité du courant en P à l'instant t. Par continuité, le potentiel et l'intensité ont pour valeurs respectives en Q

$$V + \frac{\partial V}{\partial x} dx, \qquad I + \frac{\partial I}{\partial x} dx.$$

Au bout du temps dt le potentiel et l'intensité en P sont devenus

$$V + \frac{\partial V}{\partial t} dt \qquad \text{et} \qquad I + \frac{\partial I}{\partial t} dt,$$

et pendant ce temps dt, la quantité d'électricité $I\,dt$ entre par P, alors que $\left(I + \frac{\partial I}{\partial x} dx\right) dt$ sort par Q.

S'il ne sort pas d'électricité latéralement, ce qui pourrait se produire si l'isolement était mauvais et si le milieu extérieur était conducteur, les échanges de la tranche avec l'extérieur se font seulement par P et Q.

Écrivons que la quantité d'électricité $I\,dt$ qui entre par P est égale à celle qui sert à charger la tranche augmentée de celle qui sort par Q. Si C_1 est la capacité du conducteur par unité de longueur, $C_1\,dx$ est la capacité de la tranche, et il vient

$$I\,dt = C_1\,dx \frac{\partial V}{\partial t} dt + \left(I + \frac{\partial I}{\partial x} dx\right) dt$$

Digitized by Google

ou

$$C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}.$$

Soient R_1 et $\mathcal{L}_1$ la résistance et la self-induction du conducteur par unité de longueur. Par suite de l'effet de la self-induction la force contre-électromotrice

$$-\mathcal{L}_1 \, dx \frac{\partial I}{\partial t}$$

prend naissance dans l'élément dx, et comme la différence de potentiel entre P et Q est $-\frac{\partial V}{\partial x} dx$, l'intensité I a pour valeur

$$I = \frac{-\frac{\partial V}{\partial x} dx - \mathcal{L}_1 \, dx \frac{\partial I}{\partial t}}{R_1 \, dx} = \frac{-\frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{L}_1 \frac{\partial I}{\partial t}}{R_1},$$

d'où

$$R_1 I = -\frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{L}_1 \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Nous obtenons ainsi les deux équations simultanées suivantes :

$$(1) \qquad C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x},$$

$$(2) \qquad R_1 I = -\frac{\partial V}{\partial x} - \mathcal{L}_1 \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Pour avoir l'équation aux dérivées partielles donnant V, éliminons V entre (1) et (2).

En différentiant (2) et (1) respectivement par rapport à x et t, on a

$$(3) \qquad R_1 \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \mathcal{L}_1 \frac{\partial^2 I}{\partial x \, \partial t}$$

et

$$(4) \qquad C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 I}{\partial t \, \partial x}.$$

Digitized by Google

En remplaçant dans (3) $\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t}$ par sa valeur tirée de (4), il vient

$$(5) \qquad R_1 \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mathcal{L}_1 C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

En portant dans (5) la valeur de $\frac{\partial I}{\partial x}$, tirée de (1), on trouve enfin

$$(6) \qquad \mathcal{L}_1 C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + R_1 C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Remarque. — On parvient à une équation de la même forme : 1° dans le cas des cordes vibrantes si la corde vibre dans un milieu résistant, la force antagoniste étant proportionnelle à la vitesse; 2° dans l'étude de la propagation d'une perturbation élastique quelconque, si la propagation se fait avec absorption.

Cas particulier. — Quand le terme $R_1 C_1$ est négligeable, l'équation (6) se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\mathcal{L}_1 C_1} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

et par suite la vitesse de propagation de la perturbation électrique a pour expression

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{L}_1 C_1}},$$

Cette formule a été obtenue par Kirchhoff en 1849.

ONDES HARMONIQUES STATIONNAIRES.

Soit P un plan d'onde dont tous les points vibrent parallèlement à OX. Est-il possible que le mouvement s'effec-

Digitized by Google

tuant par plans parallèles à P dans le milieu soit de la forme

$$u = a \sin \omega t,$$

a étant une fonction de l'abscisse x du plan $a = U(x)$.

Pour cela il faut que u vérifie les équations de propagation qui se réduisent ici à

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - U \omega^2 \sin \omega t$$

et que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \omega t,$$

la condition de compatibilité se réduit à

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \frac{\omega^2}{V^2} U.$$

Pour que le mouvement de loi u puisse s'établir dans le milieu, il faut donc que l'amplitude U satisfasse à l'équation (2) analogue à l'équation qui régit les petites oscillations du pendule (p. 5). Par suite,

$$(3) \qquad U = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right).$$

Ainsi à la condition de prendre pour a la valeur précédente le mouvement vibratoire harmonique stationnaire considéré pourra s'établir dans le milieu et l'élongation des points d'un plan d'abscisse x sera au temps t

$$u = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) \sin \omega t.$$

Digitized by Google

Propriétés de l'état stationnaire. — Plans où le mouvement est nul dans le milieu quel que soit t. — b étant nécessairement différent de zéro, les abscisses x des plans où le mouvement est nul dans le milieu quel que soit t, sont définies par la condition

$$\sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) = 0, \tag{4}$$

qui donne

$$\frac{\omega x}{V} + \psi = k\pi, \tag{5}$$

k étant un nombre entier positif ou négatif. L'abscisse x_k du plan P_k correspondant à k sera

$$x_k = \frac{k\lambda}{2} - \frac{\psi}{\pi}\frac{\lambda}{2}. \tag{6}$$

Si l'on pose

$$x_0 = -\frac{\psi}{\pi}\frac{\lambda}{2},$$

x_0 est l'abscisse du plan P_0 le plus voisin de la source S et qui jouit de la propriété considérée, la valeur de x_k s'écrit alors

$$x_k = x_0 + \frac{k\lambda}{2}.$$

La distance de deux plans consécutifs P_k et P_{k-1} est

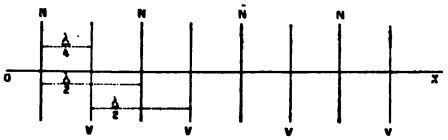
$$x_k - x_{k-1} = \frac{\lambda}{2},$$

λ étant la longueur d'onde du mouvement vibratoire considéré; il suffit donc, pour déterminer cette famille de plans parallèles, de porter, à partir de P_0, un nombre quelconque de fois $\frac{\lambda}{2}$, on aura ainsi (*fig.* 89) en menant par les points

Digitized by Google

obtenus des plans parallèles à P_0 une série de plans pour lesquels l'amplitude sera toujours nulle. Ce sont les *plans*

Fig. 89.



nodaux. Dans l'air, où V est une constante, T varie avec la vibration, les plans nodaux sont d'autant plus serrés que le son est plus aigu.

Plans ventraux. — Cherchons comment varie l'amplitude a entre deux quelconques de ces plans nodaux. Pour avoir une représentation graphique commode, bien que par hypothèse l'élongation soit parallèle à OX, nous porterons l'amplitude a perpendiculairement à OX; nous sommes amenés à construire la courbe C (*fig.* 90)

$$a = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right),$$

qui est une sinusoïde.

Il y a donc entre deux plans nodaux *répartition continue* de l'amplitude.

Les maxima et les minima de a sont donnés par l'équation

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{b\omega}{V} \cos\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) = 0$$

et les abscisses des plans pour lesquels a est maximum ou minimum vérifient la condition

$$\frac{\omega x}{V} + \psi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

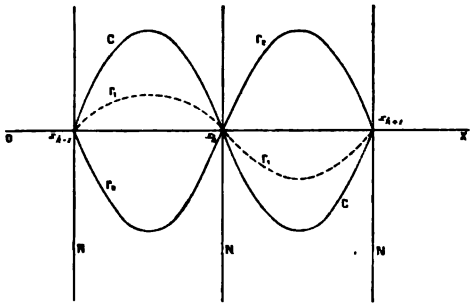
Digitized by Google

En conséquence,

$$x_{2k+1} = (2k+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\psi\lambda}{2\pi}.$$

On obtient ainsi encore une famille de plans parallèles

Fig. 90.



distants de $\frac{\lambda}{2}$ que l'on peut obtenir en faisant subir aux plans nodaux une translation de $\frac{\lambda}{2}$; ce sont les *plans ventraux*.

Répartition de l'élongation. — Pour passer de la courbe des amplitudes à la courbe pointillée r_1 qui donne les valeurs de u, il faut multiplier a par $\sin \omega t$. A chaque instant, l'élongation u est pour les différents plans la même fraction de l'amplitude qui leur correspond, fraction marquée par $\sin \omega t$.

Pour

$t = 0$, le milieu est à l'état naturel;

$t = \frac{T}{4}$, r_1 coïncide avec C;

$t = \frac{2T}{4}$, le milieu est à l'état naturel;

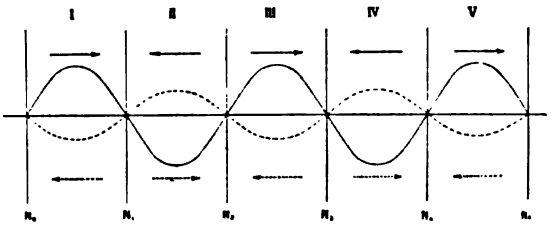
$t = \frac{3T}{4}$, r_1 est symétrique de C par rapport à OX;

$t = T$, le milieu revient à l'état naturel.

Digitized by Google

Répartition des dilatations. — Représentons (*fig.* 91) les élongations à un instant donné t dans la première cellule entre les plans nodaux N_0 et N_1, dont tous les points se

Fig. 91.



déplacent vers la droite; dans la cellule II entre N_1 et N_2, ils vont vers la gauche et ainsi de suite pour les autres intervalles.

Puisque les particules de deux cellules contiguës se rapprochent de $N_1, N_3, \ldots, N_{2k+1}$, il en résulte sur ces plans un accroissement de pression Δp et au contraire une détente se produit sur $N_0, N_2, \ldots, N_{2k}$. Cet état va périodiquement changer, Δp croît jusqu'au moment où r_1 vient se confondre avec C, c'est-à-dire t variant de o à $\frac{T}{4}$, Δp décroît ensuite jusqu'à l'époque $\frac{T}{2}$ pour laquelle il est nul. Il en est de même de la détente.

Après l'instant $\frac{T}{2}$ les déplacements se font en sens inverse et sur les plans $N_1, N_3, \ldots, N_{2k+1}$ ou il y avait augmentation de pression ou *condensation*, il y aura au contraire détente, le maximum ayant lieu pour $t = \frac{3T}{4}$. Le phénomène est inverse pour les plans $N_0, N_2, \ldots, N_{2k}$.

Propriétés des plans ventraux au point de vue de la condensation. — On peut déterminer quantitativement la con-

Digitized by Google

densation, on a établi (p. 219) que

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

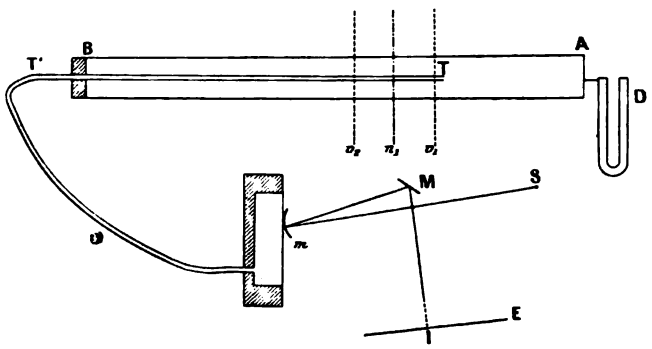
mais ici $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$ sont identiquement nuls; par suite

$$(7) \qquad \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b\omega}{V}\cos\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right)\sin\omega t.$$

Or les plans ventraux sont définis par la condition $\cos\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) = 0$, il en résulte que le mouvement harmonique stationnaire est tel que, si sur les plans nodaux le déplacement est nul, sur les plans ventraux la condensation est toujours nulle quel que soit t.

Expériences manifestant les nœuds et les ventres. — I. Un tube de verre d'environ 4^m de long et de 10^{cm} de diamètre est fermé à l'une de ses extrémités par un disque élastique qu'un

Fig. 92.



diapason D peut faire vibrer (*fig.* 92). L'autre extrémité B est fermée par un bouchon à l'intérieur duquel glisse un

Digitized by Google

petit tube de verre TT′ qu'un tube de caoutchouc met en communication avec une capsule manométrique de König C dont la membrane mobile porte un petit miroir *m*.

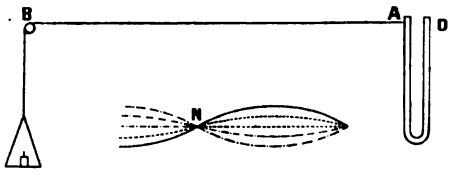
Un rayon lumineux issu d'un petit trou éclairé S vient, après réflexion sur *m* et sur un miroir tournant M, donner sur un écran E l'image I du trou.

Lorsque D est mis en mouvement, il s'établit à l'intérieur du tube un mouvement harmonique stationnaire. Si l'on fait glisser TT′ de façon que T vienne en v_1, I reste immobile sur l'écran, et si M tourne on aperçoit une droite lumineuse sur E.

T continuant à se déplacer de v_1 vers n_1, la droite devient une sinusoïde d'abord très aplatie, puis qui atteint un développement maxima en hauteur lorsque T arrive en n_1 (sinusoïde de variations de pression en n_1), puis T allant de n_1 vers v_2, la sinusoïde diminue et se réduit à nouveau à une droite lorsque T est en v_2. Si T continue son mouvement vers B, le même phénomène se reproduit périodiquement, mettant ainsi en évidence la répartition périodique dans l'espace des plans de condensation maxima et des plans où la pression reste constante.

II. *Corde vibrante* (*fig.* 93). — Une corde flexible sans rigi-

Fig. 93.



dité est fixée par son extrémité A à un diapason D entretenu électriquement, l'autre extrémité B porte un poids tenseur

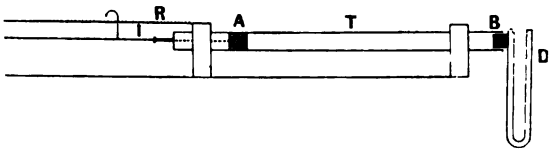
Digitized by Google

qui maintient la corde horizontale par l'intermédiaire d'une petite poulie. D étant mis en mouvement, la corde, pour des tensions convenables, se divise en un certain nombre de concamérations fixes limitées par des points N immobiles. Le plan du diapason peut contenir la corde ou être perpendiculaire à la corde (*vibrations transversales*).

Si l'on stroboscope le mouvement en éclairant la corde, avec une périodicité voisine par exemple de celle du diapason, on voit la corde se déformer lentement autour de certains points qui restent fixes (nœuds).

III. Un tube de verre de petit diamètre (*fig.* 94) est fermé à l'une de ses extrémités A par un piston rigide qui peut

Fig. 94.



glisser à frottement dur. A l'autre extrémité B un diapason porte une rondelle de diamètre légèrement inférieur à celui du tube et formant piston mobile. A l'intérieur du tube un peu de poussière de liège est répartie uniformément.

Si l'on fait vibrer le diapason, la répartition de la poussière cesse d'être uniforme, la poussière se dispose en fuseaux mettant en évidence les nœuds et les ventres.

Il est à remarquer que les extrémités des fuseaux que semblent former la corde quand elle vibre sont aux nœuds de vibration; au contraire les extrémités des fuseaux donnés par la poussière sont aux ventres, la plus grande partie de la poudre se rassemblant aux nœuds.

Digitized by Google

Exercice. — **Calcul de la température de la tranche x dans le mouvement vibratoire harmonique stationnaire (milieu gazeux).** — Soient p et T la pression et la température du gaz vibrant lorsqu'il est à l'état de repos. Supposons que, lorsque le mouvement stationnaire est établi, les compressions et dilatations soient assez rapides pour être considérées comme adiabatiques et que l'on puisse appliquer la relation

$$(8) \qquad pv^{\gamma} = \text{const.},$$

v étant le volume et γ le rapport $\frac{C}{c}$ des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

Soient Δv, Δp, ΔT les variations de volume, de pression et de température à l'instant t. En vertu de (8)

$$(9) \qquad pv^{\gamma} = (p + \Delta p)(v + \Delta v)^{\gamma},$$

et si la loi de Mariotte est applicable

$$(10) \qquad pv = RT,$$

$$(11) \qquad (p + \Delta p)(v + \Delta v) = R(T + \Delta T).$$

De (10) et (11) tirons les valeurs de v et $v + \Delta v$ et portons dans (9), il vient

$$\left(\frac{p + \Delta p}{p}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{T + \Delta T}{T}\right)^{\gamma}$$

ou

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)^{\gamma} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{\gamma}.$$

Les variations Δp et ΔT étant très petites, développons les deux membres par la formule du binome en nous bornant

Digitized by Google

aux termes du premier ordre, il vient

$$(\gamma - 1)\frac{\Delta p}{p} = \gamma \frac{\Delta T}{T},$$

et par suite

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\Delta p}{p}. \tag{12}$$

Exprimons maintenant $\frac{\Delta p}{p}$ en fonction de la dilatation Θ. Δp et ΔT étant très petits, nous pouvons les considérer comme des différentielles, de sorte que la relation (8) dérivée s'écrira

$$v\Delta p + \gamma p \Delta v = 0$$

et par suite

$$\frac{\Delta p}{p} = -\gamma\frac{\Delta v}{v} = -\gamma\Theta = -\gamma\frac{b\omega}{V}\cos\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right)\sin\omega t, \tag{13}$$

car

$$\frac{\Delta v}{v} = \Theta.$$

Cette relation (13) permet d'exprimer $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de Θ. Partir de (8) et établir l'équation

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Exercice. — *On réfléchira à la différence qu'il y a entre l'état stationnaire et l'état du milieu traversé par une onde qui se propage.*

Conséquences de conditions imposées *a priori* à un milieu dans lequel on veut installer un mouvement vibratoire harmonique stationnaire. — Si l'on impose des conditions au milieu, les mouvements vibratoires stationnaires que l'on peut installer dans le milieu ne sont plus arbitraires, ils obéissent à une certaine loi.

Digitized by Google

Nous représenterons, dans les calculs qui vont suivre, l'élongation u à l'instant t et à la distance x par la formule

$$u = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) \sin \omega t.$$

Imposons comme conditions :

I. $$u \equiv 0 \quad \text{pour } x = 0,$$
$$u \equiv 0 \quad \text{pour } x = l;$$

$u \equiv 0$ pour $x = 0$ entraîne

$$\sin \psi = 0$$

ou

$$\psi = k_1 \pi;$$

$u \equiv 0$ pour $x = l$ entraîne

$$\frac{\omega l}{V} + \psi = k_2 \pi,$$

par suite

$$\frac{\omega l}{V} = (k_2 - k_1)\pi = k\pi; \tag{14}$$

mais

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad \lambda = VT,$$

T étant la période et λ la longueur d'onde, et l'équation (14) devient

$$l = k\frac{\lambda}{2}. \tag{15}$$

On ne peut donc installer de mouvement vibratoire stationnaire qu'autant que la distance l des deux plans est liée à la longueur d'onde par la relation (15), qui peut s'écrire, en

Digitized by Google

désignant par N la fréquence,

$$\frac{1}{T} = N = k\left(\frac{V}{2l}\right) = kN_0.$$

Si le mouvement stationnaire est du domaine de l'acoustique, la série des sons compatibles avec les conditions est constituée par la série des harmoniques de N_0.

II.
$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{pour } x = 0,$$
$$u \equiv 0 \quad \text{pour } x = l;$$

la première condition donne

$$\psi = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2},$$

la seconde

$$\frac{\omega l}{V} + \psi = 2k_2\frac{\pi}{2}.$$

par différence, on a

$$\frac{\omega l}{V} = (2k + 1)\frac{\pi}{2};$$

et par suite

$$l = (2k + 1)\frac{\lambda}{4},$$

ou, ce qui revient au même,

$$N = (2k + 1)\frac{V}{4l} = (2k + 1)N_0.$$

III.
$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{pour } x = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{pour } x = l;$$

Digitized by Google

$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ pour $x = 0$ entraîne

$$\psi = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2},$$

$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ pour $x = l$

$$\frac{\omega l}{V} + \psi = (2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}$$

et par soustraction

$$\frac{\omega l}{V} = k\pi,$$

ce qui nous ramène à l'équation (18), par suite

$$l = k\frac{\lambda}{2}$$

et

$$N = kN_0.$$

Interprétation de l'état stationnaire par la composition de deux ondes se propageant en sens inverse et dont les vibrations s'effectuent dans des directions parallèles. — L'état vibratoire de loi

$$u = b \sin\left(\frac{\omega x}{V} + \psi\right) \sin \omega t$$

peut s'installer dans un milieu qui se subdivise alors en cellules ou concamérations dont la plus petite est un quart de longueur d'onde, intervalle entre un plan nodal et un plan ventral. Ce mouvement satisfait à la loi

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et nous savons que toute solution de (1) est de la forme

$$u = f(x + Vt) + \varphi(x - Vt),$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que u peut être considéré comme la somme de deux ébranlements u_1 et u_2 :

$$u_1 = f(x + Vt)$$

se propageant des $x > 0$ vers les $x < 0$ avec la vitesse V et

$$u_2 = \varphi(x - Vt)$$

se propageant des $x < 0$ vers les $x > 0$ avec la même vitesse V, qui dépend à la fois du milieu et du mode de déformation qui lui est imposé.

Cherchons deux mouvements u_1 et u_2 qui, par composition, donnent le mouvement stationnaire. Pour déterminer u_1 et u_2 partons de la formule suivante :

$$\frac{b}{2}(\sin p + \sin q) = b \sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$= b \sin\frac{p+q}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p-q}{2}\right).$$

En posant

$$\frac{p+q}{2} = \omega t,$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{p-q}{2} = \frac{\omega x}{V} + \psi,$$

et partant de u, nous tirons

$$u_1 = \frac{b}{2}\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) - \psi + \frac{\pi}{2}\right],$$
$$u_2 = \frac{b}{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{V}\right) + \psi - \frac{\pi}{2}\right].$$

I. Examinons d'abord le cas où le milieu est tel que, pour

$$x = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \qquad \text{(plan ventral)},$$

et pour

$$x = l, \qquad u \equiv 0 \qquad \text{(plan nodal)}.$$

Digitized by Google

Alors ψ est égal à un nombre impair de fois π, de sorte que u_1 et u_2 peuvent s'écrire, k étant un nombre entier,

$$u_1 = \frac{b}{2}\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) - k\pi\right],$$

$$u_2 = \frac{b}{2}\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{V}\right) + k\pi\right].$$

1° *k pair.* — u_1 et u_2 deviennent respectivement u'_1 et u'_2 définis par

$$u'_1 = \frac{b}{2}\sin\omega\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

$$u'_2 = \frac{b}{2}\sin\omega\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

2° *k impair.* — Les sinus changent de signe, u_1 et u_2 deviennent $-u'_1$ et $-u'_2$. Le mouvement u est le même que pour k pair, il est seulement changé de signe; nous nous bornerons donc au cas

$$u = u'_1 + u'_2,$$

u'_1 est le mouvement $u_0 = \frac{b}{2}\sin\omega t$ propagé à la distance x. Reste u'_2, de la condition

$$x = l, \qquad u \equiv 0,$$

il résulte que $\frac{2\omega l}{V}$ est un nombre impair de fois π, par suite u'_2 peut s'écrire

$$u'_2 = -\frac{b}{2}\sin\omega\left(t - \frac{2l - x}{V}\right);$$

u'_2 n'est pas le mouvement u''_2 qui proviendrait de u_0 après avoir parcouru le chemin $2l - x$, car u''_2 aurait pour valeur

$$u''_2 = \frac{b}{2}\sin\omega\left(t - \frac{2l - x}{V}\right),$$

Digitized by Google

ce qui est l'expression de u'_2 au signe près. Cherchons donc comment nous pouvons interpréter u'_2.

Réflexion avec changement de signe. — Supposons qu'en arrivant à la distance l, où se trouve un nœud, la vibration subisse une variation de phase égale à π, ce qui correspond pour le temps à une variation $\frac{T}{2}$. On peut alors considérer u'_2 comme étant le mouvement vibratoire $u_0 = \frac{b}{2}\sin\omega t$, après le parcours $2l - x$, ce qui donne u''_2 et un changement de signe en l, ce qui restitue u'_2, puisque

$$u'_2 = -u''_2.$$

L'état stationnaire, relatif à l'abscisse x, peut donc être considéré comme résultant de la composition de l'onde incidente avec l'onde réfléchie qui a parcouru déjà la longueur l et qui est revenue à x, à la condition d'ajouter à la distance parcourue par l'onde de retour une longueur $\frac{\lambda}{2}$ qui ne correspond pas à un espace physiquement parcouru, mais qui correspond au phénomène de la réflexion.

Considérons en S_1, symétrique de S_0, par rapport au plan nodal N d'abscisse l, une source identique à S_0, les ondes émises par ces deux sources ne donneront l'état stationnaire étudié que si la différence de phase entre S_0 et S_1 est égale à π; si S_0 et S_1 sont synchrones, il faut placer S_1 non plus à la distance $2l$ de S_0, mais à la distance $2l + \frac{\lambda}{2}$.

II. Examinons maintenant le cas où le milieu est tel que pour $x = 0$ et $x = l$, on ait $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, c'est-à-dire le cas où les plans d'abscisses 0 et l sont des plans ventraux.

Digitized by Google

On a vu (p. 321) qu'alors $\frac{2\omega l}{V}$ est un nombre entier de circonférences et par suite

$$u_1 = u'_1,$$
$$u_2 = u''_2.$$

On peut considérer l'état stationnaire comme provenant de la composition de l'onde incidente avec l'onde réfléchie qui a déjà parcouru la distance l et qui est revenue en x. Autrement dit, le mouvement stationnaire est le même que si les ondes étaient émises par les deux sources S_0 et S_1 *synchrones* et symétriques du ventre terminal.

Remarque. — Pour établir la notion d'état stationnaire on peut ne pas partir des équations générales, mais considérer comme fait d'expérience que dans un tuyau il y a réflexion (*Écho*) sur le plan qui le limite. On écrit alors les valeurs des deux vibrations et l'on fait le calcul réciproque du précédent pour déduire la valeur de l'amplitude en chaque point. La réflexion, avec ou sans changement de signe, est alors considérée comme résultant de l'expérience.

Généralité des résultats précédents. — Les propriétés de l'état stationnaire que nous venons de mettre en évidence sont les conséquences des conditions suivantes : 1° le milieu obéit à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

2° l'ébranlement est une fonction sinusoïdale du temps

$$u = U(x) \sin \omega t.$$

Ce que l'on a établi pour les vibrations longitudinales s'applique donc aux vibrations transversales sinusoïdales,

Digitized by Google

puisque les équations de compatibilité sont de la même forme. L'expérience de la corde (p. 315, II) se trouve par là expliquée.

En Optique, on retrouvera les mêmes particularités. La réflexion normale d'une onde lumineuse reproduit ce qui se passe en Acoustique dans la réflexion d'une onde sonore sur le fond d'un tuyau.

Un système d'ondes planes parallèles à un miroir M donne naissance par réflexion à une série d'ondes réfléchies avec changement de signe et un état vibratoire stationnaire prend naissance, la distance z_k du $k^{\text{ième}}$ plan nodal à M étant

$$z_k = 2k\frac{\lambda}{4}.$$

Si à la surface d'un miroir de mercure M, on dépose une couche sensible transparente, nous aurons des maxima pour l'action photographique là où l'énergie cinétique est maximum, c'est-à-dire aux ventres, et des minima sur les plans nodaux. Entre un maximum et un minimum l'action photographique est continue, et par le développement de l'épreuve, on réalise un milieu à structure périodique avec un dégradé progressif entre un maximum et un minimum mathématiques (G. Lippmann).

Remarque. — Les ondes stationnaires ne proviennent pas nécessairement d'ondes réfléchie et incidente; elles peuvent résulter (p. 162 et 170) de la composition d'ondes provenant par exemple de deux sources de même période. D'une manière générale, il suffit qu'il y ait des lieux de points tels que les différences de vitesse des vibrations parallèles qui se composent aux points considérés satisfassent à certaines conditions qui dépendent du nombre de vibrations qui se

Digitized by Google

composent en ces points et de la répartition des centres d'émission. Aux différences de marches géométriques, il faut adjoindre les effets provenant de phénomènes physiques tels que la réflexion et aussi tenir compte de la nature des milieux traversés, puisque à chacun d'eux correspond une vitesse de propagation spécifique.

Expérience. — On a pu se rendre compte, par les figures de Kundt, par la stroboscopie d'une corde vibrante (p. 316), par l'exploration à la sonde d'une colonne fluide en vibration, de l'existence des nœuds et des ventres. Nous pouvons parvenir au même résultat, pour des fréquences convenables, en utilisant les propriétés physiologiques des vibrations, c'est-à-dire le son.

Soient deux longues éprouvettes graduées T et T′, possédant chacune à leur base une tubulure latérale en communication par l'intermédiaire d'un tuyau de caoutchouc, et désignons par N et N′ les niveaux du liquide dans T et T′.

Approchons de T un diapason donnant par exemple 2048 vibrations simples, $\lambda = 0^m,32$. Nous avons vu (p. 320) que le mouvement stationnaire s'établira, si la colonne d'air qui vibre a au moins une longueur égale à $\frac{\lambda}{4} = 0^m,08$. Si, en effet, on abaisse T′, la distance D de N à l'ouverture libre de T augmente et le son émis passe nettement par un maximum lorsque $D = 0^m,08$ sensiblement. Il y a *renforcement* du son. Comme il y a ici réflexion avec changement de signe, il y a, de nouveau, renforcement du son pour

$$D = \frac{3\lambda}{4} = 0^m,24, \text{etc.}$$

La première concamération est toujours plus courte que ne le voudrait la théorie, aussi pour mesurer une longueur

Digitized by Google

d'onde par ce procédé, est-il nécessaire de relever la distance entre deux maxima intermédiaires. L'appareil représenté (*fig.* 94) permet de constater facilement, et avec précision, les mêmes faits.

Exercice relatif au cas où les deux mouvements superposés ont des propriétés voisines. — Établir le mouvement u résultant de la composition des deux mouvements parallèles

$$u_1 = a_1 \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{v_1}\right); \qquad u_2 = a_2 \sin \omega_2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

par la méthode graphique et par la méthode analytique.

Mettre u sous la forme d'un produit de deux facteurs

$$u = 2a \sin\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{x}{2}\left(\frac{\omega_1}{v_1} + \frac{\omega_2}{v_2}\right)\right]$$
$$\times \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{x}{2}\left(\frac{\omega_1}{v_1} - \frac{\omega_2}{v_2}\right)\right]$$

et expliciter les périodicités Θ_1 et Θ_2 dans le temps au point $x = x_0$, à savoir :

$$\frac{1}{\Theta_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right); \qquad \frac{1}{\Theta_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

et les périodicités X_1 et X_2 dans l'espace à l'époque $t = t_0$, à savoir :

$$\frac{1}{X_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right); \qquad \frac{1}{X_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Les vitesses de propagation des deux facteurs de u sont définies par

$$V = \frac{dx}{dt},$$

Digitized by Google

dx et dt vérifiant les conditions

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}dt-\frac{dx}{2}\left(\frac{\omega_1}{v_1}+\frac{\omega_2}{v_2}\right)=0$$

pour le premier facteur, et la condition

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}dt-\frac{dx}{2}\left(\frac{\omega_1}{v_1}-\frac{\omega_2}{v_2}\right)=0$$

pour le second.

Mettre V_1 et V_2 sous la forme

$$V_1=\frac{\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}};\qquad V_2=\frac{\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}}{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Vérifier que si l'on pose $v_2=v_1+dv$; $\lambda_2=\lambda_1+d\lambda$ et que l'on conserve seulement les parties principales pour V_1 et V_2, on a

$$V_1=v_1;\qquad V_2=v_1-\lambda_1\frac{dv_1}{d\lambda};$$

d'où, en posant $n_1=\frac{\varphi}{v_1}$,

$$V_2=v_1\left(1+\frac{\lambda_1}{n_1}\frac{dn_1}{d\lambda_1}\right).$$

APPLICATION A L'ACOUSTIQUE.

I. Des sons qu'un tuyau peut rendre et des états harmoniques stationnaires qui peuvent s'y installer. — 1° *Tuyau fermé.* — Comme on se trouve dans le cas $\frac{\partial u}{\partial x}\equiv 0$ pour $x=0$ et $u\equiv 0$ pour $x=l$, on doit avoir

$$l=\frac{\lambda}{4},\qquad l=\frac{3\lambda}{4},$$

et d'une façon générale

$$(1)\qquad l=(2k+1)\frac{\lambda}{4},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire qu'entre le nœud (orifice fermé) et le ventre (orifice ouvert) qui limitent le tuyau se placent k nœuds et k ventres intermédiaires.

Une infinité de sons peuvent être rendus ou, ce qui revient au même, renforcés par le tuyau. Leurs longueurs d'onde s'obtiennent en tirant λ de la formule (1)

$$\lambda = \frac{4l}{2k+1}. \tag{2}$$

On peut aussi interpréter la formule (1) en disant : un même son de longueur d'onde λ peut être rendu par une infinité de tuyaux dont les longueurs sont

$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Explicitons la hauteur du son. Si V est la vitesse de propagation du son dans le milieu qui remplit le tuyau et N sa fréquence, (1) peut s'écrire, en remarquant que $\lambda = \frac{V}{N}$,

$$l = (2k+1)\frac{V}{4N};$$

d'où l'on tire

$$N = (2k+1)\frac{V}{4l} \qquad \text{ou} \qquad (2k+1)N_0,$$

si l'on pose

$$N_0 = \frac{V}{4l},$$

et l'on peut dire : dans un tuyau de longueur l, le nombre des systèmes vibratoires harmoniques stationnaires qui s'y peuvent installer est infini; les sons rendus sont les *harmoniques impairs* du son dont la fréquence est

$$N_0 = \frac{V}{4l},$$

Digitized by Google

N_0 est le son fondamental, il dépend du tuyau par l et du milieu qui le remplit par V. Pour un même gaz, tous les facteurs qui font varier V (température, pression) font varier N_0. Si l'on change la nature du gaz, V varie; ainsi N_0 va en croissant si l'on charge le tube avec des gaz de plus en plus légers.

On décèle les ventres par le procédé de la sonde (p. 314) ou encore en remarquant que si l'on perce un trou à la hauteur des ventres, le son n'est pas modifié. Pour mettre les nœuds en évidence, on a recours à la sonde ou encore à la capsule manométrique de König.

Les tuyaux peuvent servir à mesurer la vitesse du son; il suffit, en effet, de mesurer le λ relatif à une fréquence connue N. De là on déduit V en remarquant que

$$\lambda N = V.$$

2° *Tuyau ouvert.* — Les notations étant les mêmes que pour le tuyau fermé, on a

$$l = 2k\frac{\lambda}{4}$$

et

$$N = K\frac{V}{2l} = KN_0;$$

$N_0 = \frac{V}{2l}$ est le son le plus grave que rende le tuyau ouvert, c'est le son fondamental. Tous les sons rendus ou renforcés par un tuyau ouvert sont les harmoniques de N_0.

Relation entre la note fondamentale relative à un tuyau ouvert et celle relative à un tuyau fermé de même longueur. — Dans le cas du tuyau fermé, le son fondamental a une

Digitized by Google

fréquence

$$N'_0 = \frac{V}{4l},$$

et pour le tuyau ouvert de même longueur

$$N_0 = \frac{V}{2l},$$

par suite

$$N_0 = 2N'_0.$$

Le son fondamental rendu par un tuyau ouvert est à l'octave de celui donné par un tuyau fermé de même longueur. Si nous prenons, comme note de comparaison, la note émise par le tuyau fermé, la série des sons qu'il peut rendre est

$$N'_0, \quad 3N'_0, \quad 5N'_0, \quad \ldots, \quad (2k+1)N'_0, \quad \ldots,$$

et, pour le tuyau ouvert, on a la série

$$2N'_0, \quad 4N'_0, \quad 6N'_0, \quad \ldots, \quad 2kN'_0.$$

Le premier donne les harmoniques impairs, l'autre les harmoniques pairs du son fondamental du tuyau fermé.

II. Tiges vibrant longitudinalement. — Les tiges vibrant *longitudinalement* sont régies par la même équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que les tuyaux; les conclusions précédentes s'appliquent donc immédiatement.

Si une tige L est encastrée à l'une de ses extrémités A, l'autre B étant libre, on a l'analogue d'un tuyau fermé : en A il y aura un nœud et en B un ventre. Si L est fixée en son

Digitized by Google

milieu, en A et B se trouvent deux ventres, et L se comporte comme un tuyau ouvert. Ce qui différentie les tiges des tuyaux, c'est l'ordre de grandeur de la vitesse; dans une tige vibrant longitudinalement, la vitesse V de propagation est

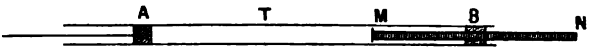
$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

E étant le module d'Young relatif à la substance de la tige et ρ la masse spécifique. La vitesse est d'environ 5000^m par seconde pour l'acier.

Voyons comment la considération de l'état stationnaire conduit à la détermination des modules d'élasticité.

Soit (*fig.* 95) un tube de verre T muni d'un piston A à

Fig. 95.



l'une de ses extrémités, l'autre portant un bouchon dans lequel une tige de métal MN est fixée par son milieu. Cette tige de longueur L, dans laquelle la vitesse de propagation est X, se comporte comme un tuyau ouvert, λ étant la longueur d'onde du son fondamental qu'elle émet et τ la période. On a donc

$$(3) \qquad L = \frac{\lambda}{2} = X\frac{\tau}{2}.$$

La position de A étant choisie de façon que dans la partie MA non occupée par la tige, un mouvement stationnaire puisse s'établir sous l'influence des vibrations de la tige métallique, on mesure la distance l entre deux nœuds. La position des nœuds est obtenue en introduisant dans le tube

Digitized by Google

de la limaille de liège par exemple. On a alors

$$(4) \qquad l = \frac{\lambda'}{2} = V' \frac{\tau}{2},$$

λ' et V' étant respectivement la longueur d'onde et la vitesse dans l'air de l'ébranlement de période τ. De (3) et (4) on tire

$$\frac{L}{X} = \frac{l}{V'}.$$

Comme L, l, V' sont connus, on a

$$X = V' \frac{L}{l}$$

et par suite

$$E = \rho V'^2 \frac{L^2}{l^2}.$$

On peut aussi se servir de la période vibratoire de cette tige comme d'une commune mesure. Répétons la précédente expérience après avoir remplacé l'air du tube T par un gaz quelconque (hélium, argon, etc.), pour lequel on ignore la vitesse v de propagation du son ; si l_1 est la nouvelle distance qui sépare deux nœuds, nous avons

$$(5) \qquad l_1 = \frac{\lambda_1}{2} = v \frac{\tau}{2};$$

la comparaison de (4) et (5) donne

$$\frac{l_1}{v} = \frac{l}{V'};$$

d'où v et par suite aussi la valeur $\gamma = \frac{C}{c}$ du rapport des chaleurs spécifiques du gaz considéré.

Remarque. — Au moyen de la sirène, par exemple, déter-

Digitized by Google

minons le nombre de vibrations N_1 correspondant au son fondamental rendu par un tuyau ouvert T_1, de longueur l_1 et de diamètre d.

La vitesse du son est

$$V = 2 l_1 N_1;$$

mais comme l'expérience montre (p. 327) que le tuyau pratique est toujours plus court que le tuyau théorique, des perturbations se produisant aux extrémités en communication directe avec l'atmosphère, la valeur de V ainsi obtenue serait trop faible.

Soit x la longueur à ajouter à l_1 pour avoir la longueur théorique. Si, comme Dulong le suppose, x est indépendant de la fréquence et de la longueur, le diamètre d du tuyau étant conservé, on aura avec deux tuyaux T_1, T_2 de même section

$$V = 2(l_1 + x)N_1,$$
$$V = 2(l_2 + x)N_2.$$

Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{l_1 + x}{l_2 + x}$$

et par suite

$$x = \frac{N_1 l_1 - N_2 l_2}{N_2 - N_1}.$$

Cette condition détermine la correction à faire subir à la longueur de tous les tuyaux de diamètre d.

III. Corde vibrante (*voir* p. 34). — On peut chercher à déterminer la forme, ou état stationnaire, que prend une corde vibrante suivant la manière dont elle est excitée.

On peut, pour faire vibrer une corde, opérer comme il suit :

Digitized by Google

1° Amener un point M de celle-ci (*fig.* 97) à une distance h de sa position d'équilibre et abandonner la corde à elle-même (guitare);

2° Donner un choc en un point M au moyen d'un petit marteau (piano);

3° Entraîner la corde au moyen d'un archet (violon);

4° Faire vibrer dans son voisinage un autre corps sonore rendant exactement le même son : la corde vibre alors *par influence.*

Voyons d'abord les sons que peut rendre une corde placée dans des conditions définies.

La corde de longueur l possédant par hypothèse un nœud à chaque extrémité, la longueur d'onde λ d'un son possible est déterminée par la condition

$$l = k\frac{\lambda}{2},$$

ou, si N est le nombre de vibrations par seconde du son considéré,

$$l = k\frac{v}{2N};$$

d'où

$$N = \frac{k_1 v}{2l} \qquad (k_1 \text{ nombre entier positif}).$$

Le nombre de vibrations par seconde correspondant au son fondamental est

$$N_0 = \frac{v}{2l},$$

par suite

$$N = k_1 N_0,$$

c'est-à-dire que la corde ayant ses deux extrémités de

Digitized by Google

même espèce (nœuds) se comporte comme un tuyau ouvert.

Donnons diverses expressions de N_0. Comme ici (p. 297),

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu}},$$

μ étant la masse de l'unité de longueur et P le poids tenseur, on peut écrire

$$N_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}}.$$

Si ρ est la masse spécifique de la corde et s la section de rayon r, on a

$$s = \pi r^2 \qquad \text{et} \qquad \mu = \pi r^2 \rho.$$

En conséquence,

$$N_0 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\pi r^2 \rho}} = \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}} = \frac{1}{ld}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}},$$

d étant le diamètre de la corde, quantité mesurable par expérience (pesée).

On peut encore écrire

$$N_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{ls\rho \times l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{M \times l}},$$

M étant la masse totale de la corde.

Si M′ est la masse du poids tenseur, la période fondamentale T_0 pourra donc s'écrire

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{M}{M'}}$$

en mettant en évidence la période du pendule simple de même longueur que la corde.

Digitized by Google

S'exercer à énoncer tous ces résultats en langage ordinaire.

Remarque. — V et v étant respectivement les vitesses de propagation des vibrations longitudinales et transversales dans une corde de longueur l, nous savons que si N_1 et N_2 désignent les nombres de vibrations correspondant aux sons fondamentaux que la corde peut rendre en vibrant soit longitudinalement, soit transversalement, on a

$$N_l = \frac{V}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad N_t = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\sigma}},$$

E désignant le module d'Young de la substance qui forme la corde, ρ sa masse spécifique, σ la masse de l'unité de longueur et P le poids tenseur.

Par suite,

$$(1) \qquad \frac{N_l}{N_t} = \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{E \times \mu}{P \times \rho}} = \sqrt{\frac{E \times s\rho}{P \times \rho}} = \sqrt{\frac{E}{\frac{P}{s}}},$$

s représentant la section droite de la corde.

Comme

$$E = \frac{\frac{P}{s}}{\frac{\Delta l}{l}},$$

Δl étant l'allongement pris par la corde de longueur l sous l'action du poids P, la formule (1) devient

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{l}{\Delta l}}.$$

Or $\frac{l}{\Delta l}$ est un nombre très grand; par suite, le son fondamental que rend une corde vibrant longitudinalement est

Digitized by Google

toujours très élevé par rapport au son fondamental que rend la corde vibrant transversalement.

Expériences. — Vérification des lois des cordes vibrantes au moyen du *sonomètre* et du dispositif de Melde. Il est particulièrement commode, dans ce dernier cas, de fixer l'une des extrémités de la corde au-dessous de l'un des plateaux d'une balance hydrostatique surélevée, l'autre extrémité étant solidaire de l'une des branches d'un électro-diapason, et de tendre la corde, par des poids déposés dans le second plateau de la balance. On supprime ainsi les perturbations dues à la poulie, et la subdivision prévue de la corde s'effectue immédiatement dès que le poids qui lui correspond est déposé dans le plateau.

Superposition d'harmoniques dans un système vibrant : Formes que peut prendre une corde selon le mode d'attaque et le point attaqué. — Cherchons l'expression générale du déplacement u_k d'un point d'abscisse x de la corde. Le déplacement dû à l'onde stationnaire est de la forme (p. 309 et 325)

$$u_k = b_k \sin \frac{\omega x}{v} \sin(\omega t + \varphi_k).$$

La corde ayant ses deux extrémités immobiles, il existe un nœud aux deux bouts et par suite

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = l.$$

Ainsi

$$\frac{\omega l}{v} = k\pi;$$

d'où

$$\omega = \frac{k\pi v}{l}$$

Digitized by Google

et l'on a

$$u_k = b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\left(\frac{k\pi v t}{l} + \varphi_k\right),$$

valeur déduite de u_k en y remplaçant ω par sa valeur.

Puisque la vitesse v est la même, quelle que soit la période, toutes les valeurs de u obtenues en faisant varier k sont solutions de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

il en est de même de leur somme

$$U = \Sigma u_k,$$

$$U = \Sigma u_k = \Sigma b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\left(\frac{k\pi v t}{l} + \varphi_k\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} U = \quad & \Sigma b_k \cos\varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi v t}{l} \\ & + \Sigma b_k \sin\varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{k\pi v t}{l} \end{aligned}$$

ou

$$U = \Sigma P_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi v t}{l} + \Sigma Q_k \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{k\pi v t}{l},$$

en posant

$$P_k = b_k \cos\varphi_k, \qquad Q_k = b_k \sin\varphi_k.$$

Ainsi donc, x désignant l'abscisse d'un point de la corde, comme U en est l'ordonnée, la forme la plus générale que peut prendre la corde, en supposant qu'il y ait un nœud à chaque extrémité, est représentée par la courbe dont l'équation est, à l'instant t,

$$U = \Sigma P_k \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi v t}{l} + \Sigma Q_k \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{k\pi v t}{l}.$$

Digitized by Google

Les deux conditions qui nous permettent de déterminer les coefficients P_k et Q_k seront, par exemple, les suivantes. Nous nous donnons à l'instant $t = 0$:

1° La forme initiale de la corde

$$(U)_{t=0} = F(x);$$

2° La distribution des vitesses

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{t=0} = \Phi(x).$$

Il faut donc que l'on ait

$$F(x) = \Sigma Q_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{2}$$

et

$$\Phi(x) = \frac{\pi c}{l} \Sigma P_k k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{3}$$

conditions obtenues en faisant $t = 0$ dans les expressions de U et de $\frac{dU}{dt}$.

Calcul de P_k *et* Q_k. — Multiplions les deux membres de (2) par $\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$ et intégrons de 0 à l, il vient

$$\int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = Q_k \int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = Q_k \frac{l}{2},$$

d'après la remarque faite (p. 25).

Par suite,

$$Q_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{4}$$

Digitized by Google

On a, de même,

$$(5) \qquad P_k = \frac{l}{k\pi v}\,\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

ce qui peut s'écrire

$$P_k = \frac{1}{N_t}\,\frac{1}{k\pi l}\int_0^l \Phi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

en faisant apparaître la fréquence relative au son fondamental.

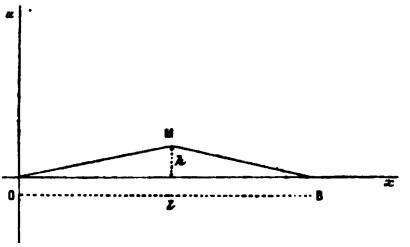
Nous allons appliquer ces formules à quelques cas nettement définis.

1. La corde est pincée en son milieu. — Soit h l'ordonnée à l'instant $t = 0$ du point M milieu de la corde de longueur l.

α. *Détermination de* Q_k. — Les droites OM et BM (*fig.* 96) ont respectivement pour équation

$$u = \frac{2h}{l}x \qquad \text{et} \qquad u = \frac{2h}{l}(l - x),$$

Fig. 96.



de sorte que x variant de 0 à $\frac{l}{2}$,

$$F(x) = \frac{2hx}{l},$$

Digitized by Google

et x variant de $\frac{l}{2}$ à l,

$$F(x) = \frac{2h}{l}(l - x).$$

Par suite,

$$Q_k = \frac{2}{l}\left[\frac{2h}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin\frac{k\pi x}{l}dx + \frac{2h}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right],$$

d'où l'on tire

$$Q_k = \frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

β. *Détermination de* P_k. — Pour $t = 0$ la corde est supposée au repos, tous les points ont donc une vitesse nulle

$$\Phi(x) \equiv 0$$

et, par suite,

$$P_k \equiv 0.$$

Toutes les formes que peut prendre la corde sont donc celles qui sont comprises dans l'équation

$$U = \Sigma\frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi vt}{l}.$$

Cette solution U ne renferme pas d'éléments pour lesquels k est pair, c'est-à-dire que la corde étant attaquée au milieu, toutes les formes qui amèneraient la corde à se subdiviser de telle façon qu'elle ait un nœud au milieu n'existent pas, ce qui est une conséquence évidente du mode d'attaque.

Remarque. — Si le point M que l'on écarte de sa position d'équilibre était à la distance a de O (*fig.* 97), un calcul

Digitized by Google

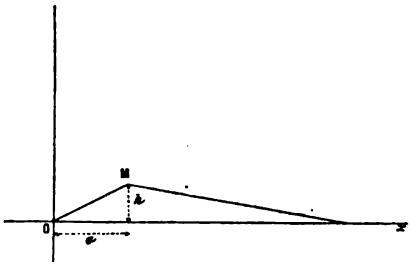
analogue nous donnerait

$$Q_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 a(l-a)} \sin\frac{k\pi a}{l}$$

et

$$U = \frac{2hl^2}{\pi^2 a(l-a)} \sum \frac{1}{k^2} \sin\frac{k\pi a}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{k\pi v t}{l},$$

Fig. 97.



m étant un nombre entier, si l'on a

$$\frac{k\pi a}{l} = m\pi$$

ou

$$ka = ml,$$

c'est-à-dire

$$\sin\frac{k\pi a}{l} = 0,$$

le terme correspondant n'existe pas dans U, c'est-à-dire que les notes, qui considérées comme seules rendues par la corde et qui produiraient un nœud au point $x = a$, n'existent pas. On peut dire aussi : la forme prise par la corde est indépendante des notes qui auraient un nœud au point excité.

2. **On opère par percussion** (piano). — Il est néces-

Digitized by Google

saire de faire des hypothèses sur le mode d'attaque. Si l'on admet : 1° que le marteau ne touche qu'un élément très petit ε de la corde, 2° que celle-ci est au repos au moment de l'attaque, 3° que le choc est infiniment court; l'analyse est immédiate :

1° A l'instant $t = 0$ toute la corde est immobile.

Alors $F(x) \equiv 0$, puisque tous les points de la corde coïncident avec l'axe des x, il en résulte immédiatement

$$Q_k \equiv 0.$$

2° A l'instant $t = 0$, $\Phi(x)$ est nul pour tous les points de la corde, sauf pour l'élément ε dont la vitesse est v_0, par suite

$$v_0 = \Phi(a) \qquad \text{pour} \qquad x = a$$

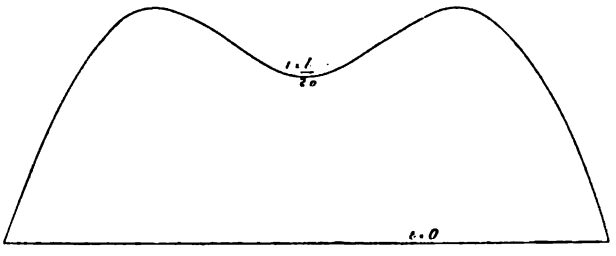
et

$$\Phi(x) \equiv 0 \qquad \text{pour} \qquad x \neq a,$$

et d'après la formule (5) en y remplaçant $\Phi(x)$ par v_0, et dx par ε, puisque l'intégrale ne porte que sur l'élément ε, il vient

$$P_k = \frac{l}{k\pi v}\,\frac{2}{l}\,v_0\,\varepsilon \sin\frac{k\pi a}{l}.$$

Fig. 98.



La forme la plus générale que peut prendre la corde à une époque quelconque t est donc représentée par l'équa-

Digitized by Google

tion

$$U = \frac{2v_0\varepsilon}{\pi v}\sum\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi v t}{l}.$$

La forme de la corde est donc encore ici indépendante des notes qui comportent un nœud au point d'attaque (*fig.* 98).

3. **On utilise l'archet** (violon). — On peut traiter complètement le problème après avoir défini les conditions du frottement solide et la façon dont la corde se comporte par rapport à l'archet. Mais nous nous bornerons aux exemples précédents.

Cette analyse, convenablement dirigée, peut évidemment s'étendre à des systèmes en vibration autres que les cordes.

Expérience. — Nous savons appliquer la méthode stroboscopique à l'étude des vibrations d'une corde.

Helmholtz et Lissajous étudiaient les vibrations par la méthode suivante : la corde, qui vibrait verticalement par exemple, portait sur l'un de ses éléments noirci au préalable un grain d'amidon. Le mouvement de ce point blanc était examiné au moyen d'un objectif porté par un diapason vibrant horizontalement et qui rendait un son de même hauteur que le son fondamental de la corde.

La forme des courbes ainsi obtenues a été dessinée par Helmholtz. De leur forme on peut remonter à la loi

$$U = f(x, t)$$

du point de la corde. Étude expérimentale à répéter.

Objectivité des termes de U et plus généralement des termes d'un développement de Fourier. — I. L'individua-

Digitized by Google

lité des termes qui entrent dans la composition de U peut-elle se révéler de quelque manière ? Plus généralement au point de vue mathématique, il y a équivalence entre la forme $f(x, t)$ d'une fonction périodique et son développement par la série de Fourier (p. 24); ce développement correspond-il à quelque chose de réel ? Autrement dit, y a-t-il dans le phénomène un effet qui caractérise directement un terme de la série pris au hasard ?

Si, pour l'œil qui examine une corde en vibration, les termes de la série de Fourier n'ont aucune réalité objective individuelle, ces termes peuvent exister au contraire pour l'oreille.

En 1636, le P. Mersenne en écoutant le son rendu par une corde y démêla la douzième et la dix-septième.

En 1701, l'existence des nœuds et des ventres ayant été mise hors de doute, la coexistence du son fondamental avec d'autres sons séparément perceptibles fut confirmée définitivement.

On fait disparaître un son de l'ensemble en touchant la corde en un point qui correspond à un ventre pour le son que l'on veut éteindre. Cet artifice facilite la séparation des divers sons simultanés rendus par la corde et permet, par suite, d'en analyser le mélange.

En 1821 survint le théorème de Fourier, théorème qui éclaire et explique les observations expérimentales antérieures.

En 1865, Young a formulé la loi que nous avons rencontrée au cours de l'examen des formes prises par une corde vibrante, à savoir : l'oreille n'entend jamais les sons qui correspondent à une subdivision de la corde pour laquelle il y aurait un nœud au point d'attaque.

Pour Ohm, l'oreille n'est sensible qu'au mouvement pen-

Digitized by Google

dulaire simple et quand elle est frappée par une vibration exprimée par une fonction périodique complexe, elle la résout en ses termes pendulaires. Ainsi les termes de la série de Fourier prennent une objectivité physiologique.

En substituant à l'oreille les résonateurs d'Helmholtz, on a un deuxième mode mécanique d'analyse des sons qui permet aussi de mettre en évidence l'objectivité des termes de la série de Fourier.

On est ainsi conduit à attribuer une valeur physique au développement de Fourier.

Expérience d'influence. — On met dans le voisinage l'un de l'autre deux diapasons rendant la même note et montés sur leurs boîtes de résonance. Avec un archet, on fait vibrer l'un d'eux, puis, au bout de quelques instants, on arrête ses vibrations en le touchant avec le doigt.

On constate alors que le second vibre et qu'il a par conséquent absorbé une partie de l'énergie émise par le premier.

Expérience. — Analyse d'un son complexe à l'aide du phénomène d'influence. Timbre. Voyelles.

II. Le courant périodique se comporte d'une manière analogue. Son intensité est aussi de la forme

$$I = \Sigma I_k \sin(k\omega t - \varphi_k)$$

et il détermine entre deux points de son circuit, séparés par une résistance non inductive, une différence de potentiel de la forme

$$v = \Sigma v_k \sin(k\omega t - \varphi_k).$$

Si donc on dispose en dérivation, sur cette portion du

Digitized by Google

circuit, un second circuit comprenant une capacité C, une résistance ρ et une self-induction constante L, il sera (*voir* p. 21) le siège d'un courant d'intensité.

$$I' = \sum \frac{v_k}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{1}{C} - L k^2 \omega^2\right)}} \cos(k\omega t - \psi_k).$$

Le circuit en dérivation étant réglé de façon à satisfaire à la condition de résonance pour le terme k, on aura (*voir* p. 21)

$$\frac{1}{C} - L k^2 \omega^2 = 0;$$

ce terme prendra alors une grande importance et un électromètre relié idostatiquement au condensateur accusera une déviation (*voir* p. 20) proportionnelle à

$$\frac{e_k}{\rho C \omega}.$$

En modifiant progressivement L et C, on dispose donc ainsi d'un moyen propre à manifester l'individualité des termes qui composent I, c'est-à-dire ce que l'on peut appeler par analogie le timbre du courant.

Problème de Döppler. — On dispose d'une source S qui émet des vibrations de période T et d'un récepteur (oreille, fente d'un spectroscope, etc.), sur lequel arrivent les vibrations; le milieu propagateur étant supposé immobile, déterminer le nombre des vibrations reçues par le récepteur en une seconde dans les deux cas suivants :

I. La source S est fixe et le récepteur R s'en éloigne ou s'en rapproche.

Digitized by Google

II. Le récepteur R est fixe et la source S s'en éloigne ou s'en rapproche.

I. S *est immobile et* R *s'approche de* S *avec la vitesse* u. — Supposons que S envoie des corpuscules dont la vitesse de déplacement soit V, deux émissions successives étant séparées par le temps T.

Soit t l'époque de la première émission, la seconde se produit au temps $t+T$, la troisième au temps $t+2T$, ..., la $n^{\text{ième}}$ au temps $t+(n-1)T$, ..., et la distance entre deux particules est VT. Cela signifie que l'on peut se représenter ces corpuscules comme placés les uns à la suite des autres, distants de $\lambda = VT$, et portés par une droite dont une longueur V défile par unité de temps devant le récepteur R au repos. Lorsque R est ainsi au repos, le nombre de particules qu'il recueille par unité de temps est donc

$$\frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = N,$$

fréquence de la vibration; si R marche vers la source avec la vitesse u, il explore par unité de temps la longueur $u+V$ de la droite, la fréquence apparente N', c'est-à-dire le nombre de corpuscules reçus par R est alors

$$N' = \frac{u+V}{VT} = N + \frac{u}{V}\frac{1}{T} = N\left(1+\frac{u}{V}\right).$$

Si le récepteur R est l'oreille et si la source émet un son de fréquence N, la fréquence apparente du son perçu sera

$$N' = N\left(1+\frac{u}{V}\right);$$

le son paraît s'élever.

Digitized by Google

Pour introduire dans les formules la longueur d'onde, il suffit de remarquer que

$$\lambda = VT = \frac{V}{N} \qquad \text{et} \qquad \lambda' = \frac{V}{N'};$$

par suite, en remplaçant N et N′ par leurs valeurs en fonction de V et de la longueur d'onde, il vient

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \frac{u}{V}};$$

la longueur d'onde apparente λ′ diminue si u croît.

Si R s'éloigne de S avec la vitesse u, il explore la longueur $V - u$ de la portion *antérieure* de droite qui défile devant lui et l'on a

$$N'' = N\left(1 - \frac{u}{V}\right); \qquad \lambda'' = \frac{\lambda}{1 - \frac{u}{V}}.$$

II. R *est fixe et* S *s'en approche avec la vitesse* v. — Soit t l'époque de la première émission, la deuxième aura lieu au temps $t + T$ et la $n^{\text{ième}}$ à l'instant $t + (n - 1)T$.

Si D est la distance RS à l'époque t, le premier projectile arrive en R à l'instant $t + \frac{D}{V}$; le deuxième, qui est parti à $t + T$, parvient en R à $t + T + \frac{D - vT}{V}$, car, dans l'intervalle de temps T, la source S s'est approchée de R de la quantité vT, le $n^{\text{ième}}$ projectile atteint R à l'instant

$$t + (n - 1)T + \frac{D - (n - 1)vT}{V}.$$

Pour avoir la fréquence apparente N′, écrivons que le

Digitized by Google

temps qui s'écoule entre l'arrivée en R du $q^{\text{ième}}$ et du $p^{\text{ième}}$ projectile est égal à l'unité; il vient

$$t + (p-1)T + \frac{D-(p-1)vT}{V} - t - (q-1)T - \frac{D-(q-1)vT}{V} = 1;$$

on en tire, pour le nombre $p-q$ des projectiles reçus par R dans l'unité de temps,

$$p-q = \frac{V}{V-v}\frac{1}{T} = \frac{V}{V-v}N;$$

mais $p-q$ est la fréquence apparente N', par suite

$$N' = \frac{1}{1-\frac{v}{V}}N,$$

et la longueur d'onde λ' qui correspond à la fréquence N' est

$$\lambda' = \frac{V}{N}\left(1-\frac{v}{V}\right) = \lambda\left(1-\frac{v}{V}\right).$$

En résumé, et d'une manière générale, V étant la vitesse de propagation de l'ébranlement périodique dans le milieu considéré, si R et S se déplacent avec les vitesses respectives u et v, on a

$$(1) \qquad N' = N\frac{1+\frac{u}{V}}{1-\frac{v}{V}}.$$

Dans cette formule, u est positif si R s'approche de S, négatif dans le cas contraire. De même $v > 0$ si S se dirige vers R et $v < 0$ si S s'en éloigne.

Digitized by Google

Expérience. — Un tube de 1^m de longueur, fermé à l'une de ses extrémités et portant à l'autre un sifflet, est muni en son milieu de deux tubulures, perpendiculaires au tube et en prolongement l'une de l'autre. On fixe l'appareil, au moyen de l'une des tubulures, à l'extrémité de l'axe d'un moteur électrique par exemple et l'on envoie un courant d'air par l'autre tubulure de façon à produire un sifflement bien continu. On fait alors tourner le moteur : si l'observateur s'est placé dans le prolongement de l'axe de rotation, sa distance au sifflet ne change pas et le son conserve une hauteur constante. Mais s'il s'est placé dans le plan de rotation du tube, il perçoit un son de hauteur variable : plus élevé lorsque le sifflet se rapproche de lui, plus grave lorsqu'il s'en éloigne.

Exercices. — 1° Conduire le raisonnement précédent de façon à obtenir directement la période apparente. Discuter la formule (I); déplacements indépendants ou obéissant à une loi imposée, translation commune à R et S. Spécifier la vitesse relative v_r de R et de S, et expliciter la formule convenant au cas où u et v sont petits par rapport à V.

2° En imaginant que les aiguilles de deux horloges identiques, liées l'une à S et l'autre à R, avancent d'une division, la première à l'émission d'une vibration et la seconde à la réception d'une vibration, que pouvez-vous dire du *temps apparent* en R ?

3° Cas où le milieu auquel les particules, ou les ondes, sont périodiquement confiées par S (en repos ou en mouvement) est lui-même en mouvement. Entraînement total ou partiel des ondes. Périodicité apparente, pour R.

Digitized by Google

ÉTHER LUMINEUX. EXTENSION DES ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ.

Éther. — Après avoir étudié expérimentalement les divers groupes de phénomènes optiques : réflexion, réfraction, interférence, diffraction, polarisation, etc., il était naturel de tenter la coordination des faits observés, c'est-à-dire de chercher à les tirer, par le raisonnement mathématique, d'un petit nombre d'hypothèses mécaniques.

Certaines analogies de propriétés : propagation, périodicité, etc., entre les phénomènes lumineux et les phénomènes sonores, ont conduit à considérer la lumière comme un effet physiologique de vibrations harmoniques. S'il en est ainsi, les propositions de la mécanique vibratoire, convenablement combinées, doivent fournir l'explication des phénomènes si variés de l'optique.

Mais d'abord comme la lumière traverse tout espace et que l'on conçoit difficilement une propagation ondulatoire sans substratum, il a fallu imaginer que tout l'espace est occupé par un milieu spécial : l'*éther*. Ce milieu, d'ailleurs, n'est pas indépendant de la matière qu'il baigne, puisque celle-ci peut soit arrêter ou réfléchir la lumière, soit se laisser traverser par elle avec une vitesse qui lui est propre, et c'est l'*indice de réfraction* qui mesure alors, en quelque sorte, la liaison entre l'éther et la matière.

Tout ce qui concerne les *franges d'interférence* s'explique immédiatement et se calcule dans les moindres détails par de tels moyens.

Les phénomènes de réflexion et de réfraction ont exigé plus d'effort : toutefois, empruntant à l'*élasticité* ses méthodes d'investigation et la forme générale de ses équations,

Digitized by Google

leur mécanisme a été explicité; mais, en raison de notre complète ignorance des propriétés immédiates de l'éther, il a été possible d'édifier plusieurs théories équivalentes, c'est-à-dire coordonnant les faits avec la même rigueur et la même simplicité. Et encore, sauf en ce qui concerne la direction de la vibration lumineuse propagée, ces diverses théories coïncident dans la plupart de leurs parties.

C'est à Fresnel que revient la gloire de l'admirable synthèse mécanique des phénomènes lumineux.

Théorie mécanique de la propagation des ondes lumineuses. — Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de l'éther et u, v, w les composantes du déplacement relatif à M. Nous avons vu (p. 283) qu'un ébranlement ne peut se propager dans un milieu caractérisé par les coefficients élastiques λ et μ, que si u, v, w sont solutions de trois équations (x, y, z) du type

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\,\Delta u+\rho X_e=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

En négligeant les actions permanentes ρX_0, ρY_0 et ρZ_0, et en modifiant légèrement la forme des équations, il vient

$$(1)\qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\left(\Delta u-\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Dans un milieu où les composantes u, v, w satisfont aux équations (1), la vitesse de propagation des ondes planes longitudinales est (p. 290)

$$V_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

et la vitesse relative aux ondes transversales, non forcément

Digitized by Google

polarisées rectilignement, a pour valeur (p. 290)

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Or, les expériences de *polarisation* montrent que l'*éther ne propage pas de vibrations longitudinales* définies à la page 285, par suite V_1 est nul, et l'on est ainsi conduit à poser

$$\lambda + 2\mu = 0.$$

Alors les équations (1) s'écrivent :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} V^2\left(\Delta u - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ V^2\left(\Delta v - \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ V^2\left(\Delta w - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations comportent une vitesse unique de propagation V; elles ne peuvent donc convenir qu'à un milieu isotrope dans lequel, au bout du temps t, l'enveloppe des plans d'onde, passant au même instant par un même point, est une *sphère* de centre O et de rayon Vt.

Révision. — Construction d'Huygens dans le cas des milieux isotropes; application au prisme. Ondes et rayons. Indice.

Équations des petits mouvements de l'éther. — Comme l'expérience établit qu'il existe des substances *biréfringentes*, dans lesquelles par suite une onde plane, d'ailleurs convenablement polarisée, peut se propager avec deux vitesses différentes, il est nécessaire de généraliser les équations (2). On y parvient en y introduisant trois coeffi-

Digitized by Google

cients e_1, e_2, e_3 caractéristiques du milieu et qui tiennent la place de notre ignorance des propriétés du milieu actif, coefficients dont le sens physique doit se dégager de l'interprétation même des résultats analytiques obtenus.

Supposons donc que u, v et w satisfont au système d'équations suivant :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1\left(\Delta u - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ e_2\left(\Delta v - \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\ e_3\left(\Delta w - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}\right.$$

et examinons si une solution de ces équations permet d'expliquer toutes les propriétés expérimentales de la double réfraction.

Onde plane. — Démontrons d'abord qu'un pareil milieu peut propager des ondes planes transversales polarisées *spéciales*. Soit un plan dont tous les points subissent un déplacement identique de composantes

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 \sin[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \varphi],\\ v &= v_0 \sin[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \varphi],\\ w &= w_0 \sin[\omega t - k(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \varphi];\end{aligned}\right.$$

k, φ étant des constantes et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan d'onde P. Si D (*fig.* 99) est la distance de l'origine à P, ce plan a pour équation

$$(5)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - D = 0.$$

Le mouvement des points du plan d'onde est d'ailleurs *rectiligne*, puisque

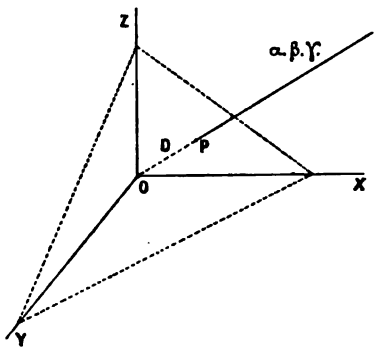
$$\frac{u}{u_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{w}{w_0}.$$

Digitized by Google

En tenant compte de (5), u, v, w peuvent s'écrire, après avoir posé $F = \omega t - kD + \varphi$,

$$(6) \qquad \begin{cases} u = u_0 \sin(\omega t - kD + \varphi) = u_0 \sin F, \\ v = v_0 \sin(\omega t - kD + \varphi) = v_0 \sin F, \\ w = w_0 \sin(\omega t - kD + \varphi) = w_0 \sin F. \end{cases}$$

Fig. 99.



Remarquons que $\sin F$ reprend la même valeur qu'au temps t, lorsque D et t varient respectivement de dD et dt, si ces deux quantités sont liées par la relation

$$\omega\, dt - k\, dD = 0,$$

relation qui exprime que F conserve alors sa valeur.

Or $\frac{dD}{dt}$ représente la vitesse V de propagation, puisque dD est le déplacement que subit le plan, en restant parallèle à lui-même, dans le temps dt, par suite

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\omega}{k} = V.$$

Tout revient maintenant à vérifier si les expressions (4) de u, v, w peuvent être solutions des équations (3).

Digitized by Google

Des valeurs de u, v, w (6), nous tirons par différentiation

$$\Delta u = -u_0 k^2 \sin F,$$

$$\Theta = k \cos F(\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0),$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -k^2 \sin F \alpha(\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u_0 \omega^2 \sin F.$$

Les quantités Δv, Δw, $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ se déduisent facilement des précédentes par permutation tournante.

Écrivons que ces quantités satisfont aux équations (3), il vient

$$(7)\quad \begin{cases} u_0(k^2 e_1 - \omega^2) = e_1 \alpha k^2 (u_0 \alpha + v_0 \beta + w_0 \gamma), \\ v_0(k^2 e_2 - \omega^2) = e_2 \beta k^2 (u_0 \alpha + v_0 \beta + w_0 \gamma), \\ w_0(k^2 e_3 - \omega^2) = e_3 \gamma k^2 (u_0 \alpha + v_0 \beta + w_0 \gamma). \end{cases}$$

En égalant les valeurs de $\alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0$ tirées des trois équations (7) et en faisant apparaître $V = \frac{\omega}{k}$, on a

$$(7\,bis)\quad \frac{u_0}{\alpha}\left(1 - \frac{V^2}{e_1}\right) = \frac{v_0}{\beta}\left(1 - \frac{V^2}{e_2}\right)$$
$$= \frac{w_0}{\gamma}\left(1 - \frac{V^2}{e_3}\right) = \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(7\,ter)\quad \frac{u_0 \alpha}{\dfrac{\alpha^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_1}}} = \frac{v_0 \beta}{\dfrac{\beta^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_2}}} = \frac{w_0 \gamma}{\dfrac{\gamma^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_3}}}$$
$$= \frac{u_0 \alpha + v_0 \beta + w_0 \gamma}{\dfrac{\alpha^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_1}} + \dfrac{\beta^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_2}} + \dfrac{\gamma^2}{1 - \dfrac{V^2}{e_3}}}$$
$$= \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0.$$

Digitized by Google

Il résulte de la dernière égalité que

$$(8)\qquad \frac{\alpha^2}{1-\frac{V^2}{e_1}}+\frac{\beta^2}{1-\frac{V^2}{e_2}}+\frac{\gamma^2}{1-\frac{V^2}{e_3}}=1.$$

Ainsi donc, ayant choisi une direction de propagation α, β, γ dans un milieu satisfaisant aux équations (3), celui-ci propage un mouvement, par ondes planes, représenté par les relations (6) et la vitesse V de propagation normale est solution de l'équation (8).

Projection sur le plan d'onde P *de la vibration propagée.* — Cherchons les cosinus directeurs α', β', γ' de la projection sur le plan P de la vibration dont les composantes sont u, v, w, respectivement proportionnels à u_0, v_0, w_0.

La perpendiculaire D au plan P abaissée du point M dont les coordonnées sont u_0, v_0, w_0 a pour équation

$$\frac{x-u_0}{\alpha}=\frac{y-v_0}{\beta}=\frac{z-w_0}{\gamma}$$

et chacun de ces rapports a la valeur $-(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0)$ pour les coordonnées X, Y, Z du point de rencontre de D et de P. Ces coordonnées sont précisément les composantes de la projection de la vibration sur le plan P, et l'on a

$$\begin{aligned} X &= u_0-\alpha(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0),\\ Y &= v_0-\beta(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0),\\ Z &= w_0-\gamma(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0); \end{aligned}$$

mais d'après la relation (7 *bis*)

$$\alpha(\alpha u_0+\beta v_0+\gamma w_0)=u_0\left(1-\frac{S}{e_1}\right),$$

Digitized by Google

de sorte que

$$X = u_0 - u_0\left(1 - \frac{S}{e_1}\right) = \frac{S u_0}{e_1},$$

de même

$$Y = \frac{S v_0}{e_2}, \qquad Z = \frac{S w_0}{e_3}.$$

Transformons encore ces expressions en remarquant que d'après la relation (7 *ter*) u_0, v_0, w_0 sont respectivement proportionnels à

$$\frac{\alpha}{1 - \frac{S}{e_1}}, \quad \frac{\beta}{1 - \frac{S}{e_2}}, \quad \frac{\gamma}{1 - \frac{S}{e_3}};$$

alors les cosinus directeurs α', β', γ' sont respectivement proportionnels à

$$\frac{S\alpha}{e_1 - S}, \quad \frac{S\beta}{e_2 - S}, \quad \frac{S\gamma}{e_3 - S},$$

et il vient

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha}{e_1 - S}\psi, \\ \beta' &= \frac{\beta}{e_2 - S}\psi, \\ \gamma' &= \frac{\gamma}{e_3 - S}\psi, \end{aligned} \right.$$

ψ étant défini par la relation

$$(14) \qquad \frac{\alpha^2}{(e_1 - S)^2} + \frac{\beta^2}{(e_2 - S)^2} + \frac{\gamma^2}{(e_3 - S)^2} = \frac{1}{\psi^2}.$$

Comme (8) admet deux racines S_1 et S_2, nous voyons qu'il existe deux systèmes de valeurs $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1$, $\alpha'_2 \beta'_2 \gamma'_2$ pour α', β', γ' obtenus en substituant successivement S_1 et S_2 dans les égalités (13). Ces deux systèmes nous donnent les

Digitized by Google

cosinus directeurs des projections Oa_1 et Oa_2 sur le plan P des deux vibrations propagées.

Surface des vitesses normales. — Si dans les diverses directions $\alpha\beta\gamma$, on porte à partir de l'origine les valeurs de V relatives à chaque direction, le lieu des extrémités de ces vecteurs est une surface dite *surface des vitesses de propagation normale* des ondes planes.

Posons $S = V^2$, l'équation (8) est en apparence du troisième degré en S, mais elle admet comme solution $S = V^2 = 0$. Cette solution correspond aux ondes longitudinales, pour lesquelles la vibration serait perpendiculaire au plan d'onde, car si l'on fait $V^2 = 0$ dans l'équation (7 *bis*) il vient

$$\frac{u_0}{\alpha} = \frac{v_0}{\beta} = \frac{w_0}{\gamma}.$$

On voit que l'éther défini par les équations (3) se distingue à la fois des fluides et des solides matériels en ce qu'il ne propage pas d'ondes longitudinales.

Les fluides ne propagent que des ondes longitudinales et les solides propagent des ondes longitudinales et des ondes transversales.

Éliminons la racine $S = 0$, pour cela écrivons l'équation (8) sous la forme suivante :

$$\frac{\alpha^2}{1 - \frac{S}{e_1}} + \frac{\beta^2}{1 - \frac{S}{e_2}} + \frac{\gamma^2}{1 - \frac{S}{e_3}} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2;$$

on tire de là

$$\alpha^2\left(\frac{1}{1 - \frac{S}{e_1}} - 1\right) + \beta^2\left(\frac{1}{1 - \frac{S}{e_2}} - 1\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{1 - \frac{S}{e_3}} - 1\right) = 0$$

Digitized by Google

ou

$$(9) \qquad \frac{\alpha^2}{e_1 - S} + \frac{\beta^2}{e_2 - S} + \frac{\gamma^2}{e_3 - S} = 0.$$

Connaissant α, β, γ, on déduit de l'équation (9) deux valeurs S_1 et S_2, de S, par suite dans la direction α, β, γ peuvent se propager deux ondes planes avec les vitesses $\sqrt{S_1}$ et $\sqrt{S_2}$.

Exercice. — Construire les intersections de la surface des vitesses normales par les plans de coordonnées.

THÉORÈME. — *On peut construire un ellipsoïde* E, *ayant pour axes* OX, OY, OZ, *et tel que si l'on coupe* E *par le plan* P *d'équation* $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ (*perpendiculaire à la direction de propagation*), *on obtient une ellipse dont les inverses* $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$ *des longueurs* ρ_1 *et* ρ_2 *des demi-axes, portés dans la direction* α, β, γ *de propagation, fixent la position au bout de l'unité de temps des ondes propagées dans la direction* α, β, γ *passant en* O *à l'instant zéro.*

Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation d'un ellipsoïde E, coupons-le par le plan P

$$(10) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

et déterminons les axes de l'ellipse de section. Pour cela, coupons E par la sphère S concentrique

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$$

de rayon ρ. Par l'intersection de E et S passe une famille de surfaces du deuxième degré représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2) = 0,$$

Digitized by Google

écrivons que l'une d'elles se réduit à un cône Γ, l'équation doit être homogène, ce qui exige que

$$-1-\lambda\rho^2=0$$

ou

$$\lambda=-\frac{1}{\rho^2},$$

et alors le cône Γ a pour équation

$$(11)\qquad \left(A-\frac{1}{\rho^2}\right)x^2+\left(B-\frac{1}{\rho^2}\right)y^2+\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)z^2=0,$$

et ses génératrices limitées à l'ellipsoïde ont toutes la même longueur comme rayons d'une même sphère.

Soit M un point de l'ellipse de section et désignons par ρ le rayon vecteur OM. Le rayon vecteur OM est un axe de l'ellipse s'il est maximum ou minimum, c'est-à-dire s'il est seul de son espèce. Nous sommes ainsi amenés à écrire que le plan P de section est tangent au cône Γ, car alors il n'y aura dans l'ellipse qu'un seul rayon vecteur de longueur ρ. Cette condition sera réalisée si l'équation

$$\left[\gamma^2\left(B-\frac{1}{\rho^2}\right)+\beta^2\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)\right]u^2$$
$$+2\alpha\beta\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)u+\left[\gamma^2\left(A-\frac{1}{\rho^2}\right)+\alpha^2\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)\right]=0,$$

obtenue en éliminant z entre les relations (10) et (11) et en divisant par x^2, a une racine double, ce qui a lieu lorsque

$$\gamma^2\left(A-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(B-\frac{1}{\rho^2}\right)+\gamma^2\beta^2\left(A-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)$$
$$+\alpha^2\gamma^2\left(B-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)=0.$$

Digitized by Google

En divisant par $\left(A-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(B-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(C-\frac{1}{\rho^2}\right)$, il vient

$$(12)\qquad \frac{\alpha^2}{A-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{\beta^2}{B-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{\gamma^2}{C-\frac{1}{\rho^2}}=0,$$

ce qui est l'équation aux longueurs des demi-axes de l'ellipse de section.

Pour que le théorème soit démontré, c'est-à-dire pour que $S=V^2=\frac{1}{\rho^2}$, il suffit de prendre

$$A=e_1,\qquad B=e_2,\qquad C=e_3,$$

car alors l'équation (12) coïncide avec l'équation (9) qui donne les vitesses normales de propagation.

En résumé, si l'on considère l'ellipsoïde E

$$e_1x^2+e_2y^2+e_3z^2=1$$

et si on le coupe par le plan P

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

parallèle à l'onde propagée, on obtient une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs ρ_1 et ρ_2; si, sur la perpendiculaire menée par O au plan P, on porte $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$, on obtient la position des ondes au temps 1.

On peut donc dire que E est l'ellipsoïde des vitesses de propagation normale. Appelons-le ellipsoïde de Fresnel.

Sections cycliques. — Supposons e_2 compris entre e_1 et e_3, c'est-à-dire que OY est l'axe moyen de l'ellipsoïde E

$$e_1x^2+e_2y^2+e_3z^2=1.$$

Digitized by Google

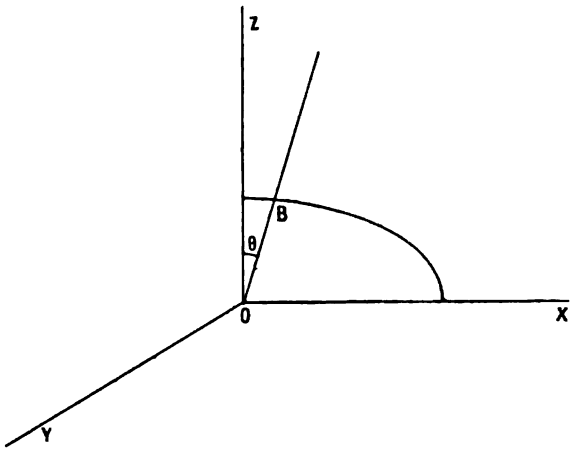
Si l'ellipse de section par le plan P est une circonférence, ρ_1 et ρ_2 ont la même valeur et il n'existe plus qu'une seule vitesse de propagation normale dans les deux directions normales à ces sections cycliques.

Les deux directions cycliques de l'ellipsoïde E passent par l'axe moyen OY et sont symétriques par rapport au plan ZOY.

Soit OB (*fig.* 100) la trace de l'un de ces plans de section cyclique sur ZOX et B son intersection avec l'ellipse

$$e_1 x^2 + e_3 z^2 = 1.$$

Fig. 100.



Pour déterminer la direction OB, écrivons que

$$\mathrm{OB} = r = \frac{1}{\sqrt{e_2}}.$$

Si m est le coefficient angulaire de OB, on trouve pour les coordonnées x et z de B

$$x^2 = \frac{1}{e_1 + m^2 e_3}, \qquad z^2 = \frac{m^2}{e_1 + m^2 e_3};$$

Digitized by Google

il en résulte que

$$r^2 = \frac{1}{e_2} = \frac{1 + m^2}{e_1 + m^2 e_3}.$$

En conséquence

$$(14\ bis) \qquad m = \pm\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}},$$

et, par suite, si θ est l'angle de OB avec OZ,

$$(15) \qquad \tang\theta = \pm\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}.$$

Ainsi donc, dans un milieu matière éther constitué de telle façon que le système d'équations (3) relatif aux mouvements de l'éther soit satisfait, il y aura deux directions privilégiées, appelées *axes optiques*, suivant lesquelles se propagera une seule onde plane. Ces axes optiques sont perpendiculaires aux sections cycliques.

Milieux uniaxes et biaxes. — Dans le cas général, où les deux directions sont distinctes, le milieu est dit *biaxe;* si les deux axes sont confondus, c'est-à-dire si l'ellipsoïde E est de révolution, il est dit *uniaxe.*

Direction des axes de l'ellipse. — Soit à déterminer les cosinus directeurs α', β', γ' des axes de l'ellipse ε, section de l'ellipsoïde E par le plan P. α', β', γ' satisfont aux équations

$$(16) \qquad \alpha'^2 + \beta^2 + \gamma'^2 = 1,$$

$$(17) \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

$$(18) \qquad e_1\alpha'^2 + e_2\beta'^2 + e_3\gamma'^2 = \frac{1}{\rho^2} = S,$$

(17) exprime que les axes de l'ellipse ε sont dans le plan P

Digitized by Google

et (18) que les extrémités de ces axes sont sur l'ellipsoïde.

Pour déterminer α', β', γ', remarquons qu'en multipliant la relation (16) par S et en retranchant de (18), il vient

$$(19) \qquad (e_1 - S)\alpha'^2 + (e_2 - S)\beta'^2 + (e_3 - S)\gamma'^2 = 0,$$

équation de laquelle on passe à la relation (9) en y remplaçant α', β', γ' par les valeurs

$$(20) \quad \alpha' = \frac{\alpha}{e_1 - S}\psi, \quad \beta' = \frac{\beta}{e_2 - S}\psi, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{e_3 - S}\psi,$$

ψ étant une constante que l'on détermine en écrivant que α', β', γ' satisfont à la relation (16), on a ainsi

$$\frac{\alpha^2}{(e_1 - S)^2} + \frac{\beta^2}{(e_2 - S)^2} + \frac{\gamma^2}{(e_3 - S)^2} = \frac{1}{\psi^2}.$$

Pour avoir les deux systèmes de cosinus directeurs $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1$, $\alpha'_2 \beta'_2 \gamma'_2$ correspondant aux deux axes de l'ellipse, il suffit de remplacer S dans les valeurs de α', β', γ' successivement par S_1 et S_2 racines de l'équation (9).

Remarquons que *les axes de l'ellipse* ε *coïncident précisément avec les projections sur le plan* P *des deux directions de vibrations qui se propagent dans le milieu considéré* (p. 361).

Le plan projetant la vibration u, v, w sur le plan P, passe par les deux directions $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, il a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

Digitized by Google

ou, en tenant compte des relations (20),

$$x\frac{(e_2-e_3)(e_1-S)}{\alpha}+y\frac{(e_3-e_1)(e_2-S)}{\beta}$$
$$+z\frac{(e_1-e_2)(e_3-S)}{\gamma}=0.$$

En remplaçant successivement S par les racines S_1 et S_2 de l'équation (9), on obtient les deux plans projetant sur le plan P les vibrations propagées par le milieu.

Surface d'onde. — On appelle surface d'onde caractéristique pour un milieu déterminé l'enveloppe, au bout du temps unité, des plans d'onde passant au même instant par un point O et se propageant dans toutes les directions.

La droite joignant le point O au point de contact de la surface et du plan d'onde est le *rayon* correspondant à ce plan, par extension de la construction d'Huygens.

La méthode que nous indiquerons pour déterminer l'équation de la surface d'onde est celle de Smith.

L'équation du plan d'onde normal à la direction $\alpha\beta\gamma$ est, à l'instant $t=1$,

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-V=0, \tag{21}$$

α, β, γ et V satisfaisant aux équations

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \tag{22}$$

$$\frac{\alpha^2}{V^2-e_1}+\frac{\beta^2}{V^2-e_2}+\frac{\gamma^2}{V^2-e_3}=0. \tag{23}$$

Pour avoir l'équation de la surface d'onde Σ il faut, par application de la théorie des surfaces enveloppes, éliminer α,

Digitized by Google

β, γ et V entre les relations (21), (22), (23) et leurs dérivées

$$(24) \qquad x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma - dV = 0,$$

$$(25) \qquad \alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0$$

et

$$(26) \quad \frac{\alpha\,d\alpha}{V^2 - e_1} + \frac{\beta\,d\beta}{V^2 - e_2} + \frac{\gamma\,d\gamma}{V^2 - e_3} = V\,dV\left[\frac{\alpha^2}{(V^2 - e_1)^2} - \frac{\beta^2}{(V^2 - e_2)^2} + \frac{\gamma^2}{(V^2 - e_3)^2}\right],$$

qui s'écrit, d'après (14),

$$(27) \qquad \frac{\alpha\,d\alpha}{V^2 - e_1} + \frac{\beta\,d\beta}{V^2 - e_2} + \frac{\gamma\,d\gamma}{V^2 - e_3} = \frac{1}{\psi^2}V\,dV,$$

$d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ satisfont aux relations (24), (25), (27). Écrivons que (24) est identique à la somme qu'on obtient en ajoutant (25) et (27) après les avoir respectivement multipliées par des facteurs convenables à déterminer μ et λ, il vient :

$$(28) \qquad x = \alpha\left(\mu + \frac{\lambda}{V^2 - e_1}\right),$$

$$(29) \qquad y = \beta\left(\mu + \frac{\lambda}{V^2 - e_2}\right),$$

$$(30) \qquad z = \gamma\left(\mu + \frac{\lambda}{V^2 - e_3}\right),$$

$$(31) \qquad 1 = \frac{\lambda}{\psi^2}V.$$

I. $$\mu = V.$$

En effet, formons, en partant des expressions (28), (29) et (30), la quantité

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = V;$$

Digitized by Google

il vient

$$\mu + \lambda\left(\frac{\alpha^2}{V^2 - e_1} + \frac{\beta^2}{V^2 - e_2} + \frac{\gamma^2}{V^2 - e_3}\right) = V;$$

mais d'après (9) le coefficient de λ est nul, par suite

(32) $$\mu = V.$$

II. $$\lambda = V(r^2 - V^2),$$

r^2 étant égal à $x^2 + y^2 + z^2$.

En partant toujours des expressions (28), (29) et (30), formons la quantité $x^2 + y^2 + z^2$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = {} & \mu^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \\ & + \lambda^2\left[\frac{\alpha^2}{(V^2 - e_1)^2} + \frac{\beta^2}{(V^2 - e_2)^2} + \frac{\gamma^2}{(V^2 - e_3)^2}\right] \\ & + 2\mu\lambda\left[\frac{\alpha^2}{V^2 - e_1} + \frac{\beta^2}{V^2 - e_2} + \frac{\gamma^2}{V^2 - e_3}\right], \end{aligned}$$

qui, en vertu de (22), (9) et (14), se réduit à

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 + \frac{\lambda^2}{\psi^2};$$

mais d'après les égalités (32) et (31)

$$\mu = V \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda}{\psi^2} = \frac{1}{V},$$

par suite

$$r^2 = V^2 + \frac{\lambda}{V},$$

d'où

(33) $$\lambda = V(r^2 - V^2).$$

En remplaçant dans les égalités (28), (29) et (30) λ et μ

Digitized by Google

par leurs valeurs tirées des équations (32) et (33), il vient

$$(34)\qquad \begin{cases} x = V\alpha\dfrac{r^2 - e_1}{V^2 - e_1}, \\ y = V\beta\dfrac{r^2 - e_2}{V^2 - e_2}, \\ z = V\gamma\dfrac{r^2 - e_3}{V^2 - e_3}. \end{cases}$$

Rayon. — x, y, z sont les coordonnées du point M où l'onde plane perpendiculaire à la direction α, β, γ touche la surface d'onde. Par conséquent le *rayon* OM a pour paramètres directeurs x, y et z.

Diverses formes de l'équation de la surface d'onde. — Des expressions précédentes de x, y, z, on tire

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{r^2 - e_1} = \dfrac{V\alpha}{V^2 - e_1} = \dfrac{x - V\alpha}{r^2 - V^2}, \\ \dfrac{y}{r^2 - e_2} = \dfrac{V\beta}{V^2 - e_2} = \dfrac{y - V\beta}{r^2 - V^2}, \\ \dfrac{z}{r^2 - e_3} = \dfrac{V\gamma}{V^2 - e_3} = \dfrac{z - V\gamma}{r^2 - V^2}. \end{cases}$$

On déduit de là, en multipliant ces rapports (35) respectivement par x, y, z et ajoutant,

$$\frac{x^2}{r^2 - e_1} + \frac{y^2}{r^2 - e_2} + \frac{z^2}{r^2 - e_3}$$
$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2 - V^2} - \frac{V(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{r^2 - V^2};$$

mais

$$(21)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = V \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

Digitized by Google

il en résulte que

$$(36) \qquad \frac{x^2}{r^2-e_1}+\frac{y^2}{r^2-e_2}+\frac{z^2}{r^2-e_3}=1.$$

Nous pouvons donner à cette équation (36) de la surface d'onde une autre forme en remplaçant le second membre 1 par $\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$, il vient alors

$$(37) \qquad \frac{e_1x^2}{r^2-e_1}+\frac{e_2y^2}{r^2-e_2}+\frac{e_3z^2}{r^2-e_3}=0.$$

Pour obtenir une équation où ne figurent plus que x, y, z, chassons les dénominateurs, remplaçons r^2 par $x^2+y^2+z^2$, après avoir supprimé le facteur commun r^2, il vient

$$(37') \quad (x^2+y^2+z^2)(e_1x^2+e_2y^2+e_3z^2)-e_1(e_2+e_3)x^2 \\ -e_2(e_1+e_3)y^2-e_3(e_2+e_1)z^2+e_1e_2e_3=0.$$

Décomposition de la surface d'onde. — Nous avons supposé $e_1>e_2>e_3$; examinons maintenant ce que devient la surface d'onde lorsque

$$e_1=e_2\neq e_3.$$

Si l'on met alors en évidence le facteur

$$e_1x^2+e_1y^2+e_3z^2-e_1e_3,$$

il vient

$$(x^2+y^2+z^2-e_1)(e_1x^2+e_1y^2+e_3z^2-e_1e_3)=0.$$

La surface d'onde se décompose, par suite, en deux surfaces du second degré, l'une S

$$x^2+y^2+z^2-e_1=0$$

Digitized by Google

est une sphère et l'autre E

$$e_1 x^2 + e_1 y^2 + e_3 z^2 - e_1 e_3 = 0$$

est un ellipsoïde de révolution autour de OZ admettant comme plan de symétrie perpendiculaire à OZ le plan XOY. S et E coupent OZ aux deux mêmes points A et A′, car pour $x = 0$, $y = 0$, les deux surfaces donnent

$$z^2 = e_1.$$

Les surfaces S et E sont donc tangentes entre elles aux points A et A′.

L'ellipse méridienne de E a pour équation

$$e_1 x^2 + e_3 z^2 - e_1 e_3 = 0,$$

elle rencontre OX en deux points B, B′ d'abscisses respectives

$$x = +\sqrt{e_3}, \qquad x = -\sqrt{e_3}.$$

Si, comme nous l'avons supposé, on a $e_1 > e_3$, E est intérieur à S, il est extérieur dans le cas contraire $e_3 > e_1$.

Pour un tel milieu, l'ellipsoïde aux inverses des vitesses normales est aussi de révolution autour de OZ et le milieu est uniaxe.

Sections de la surface d'onde par les plans de coordonnées. — Si l'on coupe la surface d'onde par le plan $x = 0$, on obtient une circonférence

$$y^2 + z^2 - e_1 = 0$$

et une ellipse

$$\frac{y^2}{e_3} + \frac{z^2}{e_2} - 1 = 0;$$

Digitized by Google

de même, la section par le plan $z = 0$ est la circonférence

$$x^2 + y^2 - e_3 = 0,$$

et l'ellipse

$$\frac{x^2}{e_2} + \frac{y^2}{e_1} - 1 = 0.$$

Dans l'un et l'autre cas, les deux courbes de section n'ont aucun point réel commun.

La section la plus intéressante est celle faite par le plan $y = 0$ perpendiculaire à l'axe moyen, les deux courbes sont comme précédemment une circonférence

$$x^2 + z^2 - e_2 = 0,$$

et l'ellipse

$$\frac{z^2}{e_1} + \frac{x^2}{e_3} - 1 = 0,$$

et si, comme nous l'avons déjà supposé, $e_1 > e_2 > e_3$, ces deux courbes se coupent en quatre points réels et si A est le point d'intersection situé dans l'angle XOY, l'angle $\Theta_1 = \widehat{XOA}$ est déterminé par la relation

$$\text{(38)} \qquad \tang \Theta_1 = \sqrt{\frac{e_1}{e_3}} \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}},$$

car les coordonnées x et z du point A sont données par les égalités

$$x^2 = e_3 \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}, \qquad z^2 = e_1 \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Des formules (15) et (38) il résulte que la direction OA est distincte de l'axe optique.

Tous les plans tangents à la surface d'onde, le long de son intersection par le plan de symétrie ZOX, sont perpendiculaires à ce dernier.

Digitized by Google

Plans tangents aux deux nappes. — Cherchons l'équation des plans tangents aux deux nappes de la surface, plans qui interviennent dans la réfraction conique.

L'équation générale des tangentes au cercle

$$x^2 + z^2 - e_2 = 0$$

est

$$z = mx + \sqrt{e_2(m^2+1)}. \tag{39}$$

Écrivons que cette droite est tangente à l'ellipse

$$\frac{z^2}{e_1} + \frac{x^2}{e_3} - 1 = 0. \tag{40}$$

Pour cela, remplaçons dans (40) z par sa valeur (39) et écrivons que l'équation ainsi obtenue

$$x^2(e_3 m^2 + e_1) + 2me_3\sqrt{e_2(m^2+1)}x + e_2(m^2+1) - e_1 e_3 = 0$$

a une racine double, on obtient ainsi

$$m = \pm\sqrt{\frac{e_2(e_3 - e_1)}{e_3 - e_2}};$$

ce qui montre, en se reportant à la formule (14 *bis*), que ces quatre plans tangents aux deux nappes

$$z = \pm\sqrt{\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_2}}\,x \pm \sqrt{\frac{e_2(e_3 - e_1)}{e_3 - e_2}}$$

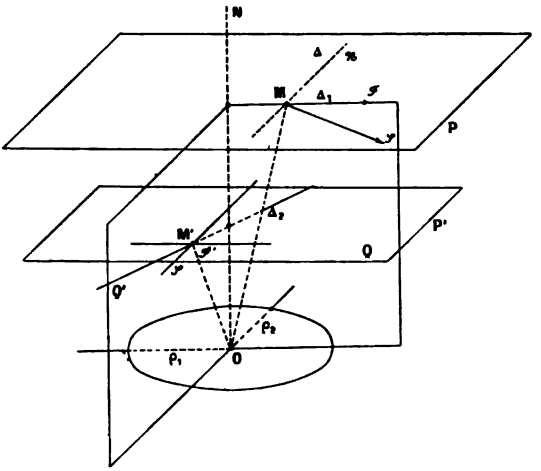
sont deux à deux parallèles aux sections cycliques de l'ellipsoïde aux inverses des vitesses normales et que chaque couple de plans tangents parallèles est perpendiculaire à l'un des axes optiques du milieu.

THÉORÈME I. — *Soit* ON (*fig.* 101) *la normale au plan* P

Digitized by Google

menée par l'origine, le rayon OM *est dans le plan* Q *déterminé par* ON *et l'axe de l'ellipse, dont l'inverse* $\frac{1}{\rho}$ *fixe la position du plan d'onde.*

Fig. 101.



En effet, ce plan Q a pour équation (p. 369)

$$\frac{x(e_2-e_3)(e_1-S)}{\alpha}+y\frac{(e_3-e_1)(e_2-S)}{\beta}$$
$$+z\frac{(e_1-e_2)(e_3-S)}{\gamma}=0,$$

et les paramètres directeurs du rayon sont (34)

$$V\alpha\frac{r^2-e_1}{S-e_1},\quad V\beta\frac{r^2-e_2}{S-e_2},\quad V\gamma\frac{r^2-e_3}{S-e_3}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans le premier membre de l'équa-

Digitized by Google

tion du plan Q, il vient

$$r^2(e_2 - e_3 + e_3 - e_1 + e_1 - e_2)$$
$$- e_1 e_2 + e_1 e_3 - e_2 e_3 + e_1 e_2 - e_1 e_3 + e_2 e_3 \equiv 0;$$

le rayon est donc bien situé dans le plan Q.

Théorème II. — *La vibration u, v, w, qui est dans le plan* Q, *est perpendiculaire au rayon* OM.

Les paramètres directeurs de la vibration et du rayon OM sont respectivement

$$(7\ ter) \qquad \frac{\alpha e_1}{S - e_1}, \quad \frac{\beta e_2}{S - e_2}, \quad \frac{\gamma e_3}{S - e_3}$$

et

$$(34) \qquad \frac{V\alpha(r^2 - e_1)}{S - e_1}, \quad \frac{V\beta(r^2 - e_2)}{S - e_2}, \quad \frac{V\gamma(r^2 - e_3)}{S - e_3}.$$

Si les deux directions sont perpendiculaires, on doit avoir

$$(41) \qquad \frac{\alpha^2 e_1(r^2 - e_1)}{(S - e_1)^2} + \frac{\alpha^2 e_2(r^2 - e_2)}{(S - e_2)^2} + \frac{\gamma^2 e_3(r^2 - e_3)}{(S - e_3)^2} = 0.$$

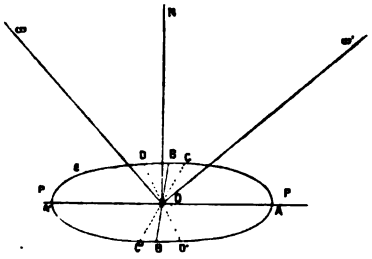
Pour vérifier qu'il en est bien ainsi, exprimons que les coordonnées x, y, z (34) de l'extrémité du rayon vérifient l'équation de la surface d'onde sous la forme (37), nous obtenons alors l'égalité (41); la vibration est donc bien perpendiculaire au rayon.

Théorème III. — *Les plans* R *et* R′ *qui passent respectivement par* ON *et l'un des deux axes* AA′ *et* BB′ *de l'ellipse* ε *de section de l'ellipsoïde* E *aux inverses des vitesses normales par le plan* P *sont les plans bissecteurs des plans* π *et* π'

Digitized by Google

déterminés respectivement par ON *et l'un des axes optiques* Oω *et* Oω'.

Fig. 102.



Désignons par CC′ et DD′ les traces sur P des plans de sections cycliques qui passent par O (*fig.* 102). Alors

$$CC' = DD',$$

car ces deux cordes sont égales à l'axe moyen de E; par suite, les deux diamètres CC′ et DD′ admettent les axes AA′ et BB′ comme bissectrices.

Oω est un axe optique, il est par suite perpendiculaire à une direction de plans cycliques et, par suite, à CC′. Comme ON est également normale à CC′, CC′ est perpendiculaire au plan ωON, c'est-à-dire au plan π. De même DD′ est perpendiculaire à π'.

Soient (*fig.* 103) II′ et HH′ les traces des plans π et π' sur le plan P, l'angle IOH est le dièdre de l'angle de π et π'; comme AOB est le dièdre de l'angle des plans R et R′ il suffit, pour démontrer le théorème, d'établir que OA′, par exemple, qui est bissectrice de $\widehat{COD'}$, est bissectrice de l'angle $\widehat{IOH}$.

En effet,

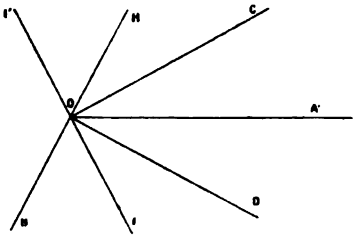
$$\widehat{COI} = \widehat{D'OH} = 1^d,$$

Digitized by Google

par hypothèse,

$$\widehat{COA'} = \widehat{A'OD'},$$

Fig. 103.



puisque OA' est bissectrice de $\widehat{COD'}$, donc

$$\widehat{IOD'} = \widehat{COH},$$

car

$$\widehat{IOD'} = \widehat{COI} - \widehat{D'OA'} = \widehat{D'OH} - \widehat{COA'} = \widehat{HOC};$$

par suite,

$$\widehat{A'OH} = \widehat{A'OC} + \widehat{COH} = \widehat{A'OD} + \widehat{D'OI} = A'OI,$$

OA' est bissectrice de l'angle $\widehat{IOH}$. Les plans R et R' sont donc bien les bissecteurs des plans π et π'.

Indices principaux. — En prenant comme plan d'incidence l'un quelconque des trois plans définis par les directions principales ox, y, z, et appliquant la construction d'Huygens à un rayon venant de l'espace vide contigu, un rayon réfracté, obéissant aux lois de Descartes, figurera toujours parmi les deux rayons réfractés obtenus. En effet, la section de la surface d'onde, par un tel plan d'incidence,

Digitized by Google

comprend toujours une circonférence, et le plan tangent à la surface d'onde, en un point de cette circonférence, est perpendiculaire au plan d'incidence choisi.

Comme les rayons des circonférences sont respectivement $\sqrt{e_1}$, $(x=0)$; $\sqrt{e_2}$, $(y=0)$; $\sqrt{e_3}$, $(z=0)$, on est ainsi conduit à définir, pour le milieu cristallisé, trois *indices principaux*, N_1, N_2, N_3, liés aux constantes e_1, e_2, e_3 par les relations

$$N_1 = \frac{v}{\sqrt{e_1}}, \qquad N_2 = \frac{v}{\sqrt{e_2}}, \qquad N_3 = \frac{v}{\sqrt{e_3}},$$

la vitesse de propagation de l'onde lumineuse dans le vide étant v.

Dans le cas des *uniaxes*, deux des trois indices principaux sont égaux.

Revision. — Lames et prismes permettant de mesurer les indices principaux.

Réfraction conique intérieure. — On peut être conduit, par la construction d'Huygens précédente, à mener un plan tangent commun aux deux nappes (p. 376). Or, un tel plan, perpendiculaire à un axe optique, touche la surface suivant une circonférence; les rayons réfractés qui correspondent au rayon incident considéré sont donc les génératrices du cône, ayant le point d'incidence pour sommet et la courbe de contact du plan tangent comme directrice. Si un tel cône de rayons se présente à l'émergence sur une face plane séparant le milieu cristallisé du vide, la construction d'Huygens répartira les rayons émergents, suivant les génératrices d'un cylindre parallèle au rayon incident dans le cas d'une lame à faces parallèles.

Comme l'axe optique est l'une des génératrices du cône,

Digitized by Google

le plan déterminé par l'axe optique et un point **M** de la courbe de contact coupe le plan de celle-ci suivant une droite projection de la génératrice relative au point **M**. Lorsque **M** décrit la circonférence, la projection tourne de une demi-circonférence.

Il est à remarquer que la réfraction conique intérieure fait correspondre une infinité de rayons à un même plan d'onde.

Exercices. — 1° Établir que l'angle β, sous lequel on voit, du centre de la surface d'onde, la portion de tangente commune au cercle et à l'ellipse ($y = 0$), limitée aux deux points de contact, est tel que

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}}{e_2};$$

2° Expliciter, en partant de la relation (37), la condition qui exprime qu'un plan tangent à la surface d'onde est parallèle à Oy; vérifier qu'on obtient ainsi un ellipsoïde ayant les mêmes plans cycliques que l'ellipsoïde de Fresnel et établir que la courbe de contact, du plan tangent commun aux deux nappes de la surface d'onde, est une circonférence.

Réfraction conique extérieure. — Supposons qu'un rayon lumineux traverse une lame cristalline à faces parallèles, suivant la direction OA définie par l'angle Θ_1 (p. 375). Pour fixer la direction des rayons émergents, il faut mener en A un plan tangent à la surface d'onde; or, il y a une infinité de plans tangents en A à la surface, et à chacun de ces plans correspond un plan tangent à la sphère S de rayon V, relative au vide, d'où une infinité de rayons émergents, formant les génératrices d'un cône ayant pour

Digitized by Google

sommet le point d'émergence et pour directrice la courbe des points de contact des plans tangents à S.

Les directions telles que OA sont souvent appelées axes de *réfraction conique extérieure*.

Exercices. — 1° Vérifier, à l'aide des formules (15) et (38) que les axes de réfraction conique extérieure sont les axes des sections cycliques de l'ellipsoïde

$$(E') \qquad \frac{x^2}{e_1} + \frac{y^2}{e_2} + \frac{z^2}{e_3} = 1,$$

polaire réciproque de l'ellipsoïde de Fresnel E (p. 363). Étudier les propriétés du système (E), (E').

2° Former, à l'aide de la formule (9) la surface Σ' polaire réciproque de la surface d'onde Σ et vérifier que la surface Σ' est liée à l'ellipsoïde (E') comme la surface Σ à l'ellipsoïde (E).

S'exercer à faire correspondre, à toute propriété des plans d'onde dans l'une des surfaces, une propriété des rayons dans l'autre surface; en particulier établir qu'à l'angle β, dans Σ, correspond dans Σ' un angle β' tel que

$$\operatorname{tang}\beta' = \sqrt{\frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{e_1 e_3}}.$$

Rechercher aussi la direction des plans passant par le rayon et la vibration dans la réfraction conique extérieure.

Par le centre de (E') on mène une droite quelconque et un plan perpendiculaire à cette droite. On porte sur la droite, et à partir du centre, des longueurs égales aux demi-axes de la section faite dans (E') par le plan. Trouver, à l'aide de (12), l'équation du lieu des points ainsi obtenus. Constater que ce lieu est la surface d'onde.

Sections de (E) relatives aux deux rayons confondus suivant un vecteur de (E'). Sections de (E') relatives aux deux ondes planes se

Digitized by Google

propageant normalement à un même vecteur de (E). Cas des sections circulaires de (E) et de (E').

3° Calculer les cosinus directeurs α, β, γ d'une direction en fonction des cosinus des angles ε_1, ε_2 que forme la direction considérée avec les axes optiques du milieu.

4° Utilisant les résultats de l'exercice précédent, établir que les racines S_1, S_2 de l'équation (9) sont telles que

$$S_1 - S_2 = (e_1 - e_3)\sin\varepsilon_1 \sin\varepsilon_2,$$
$$S_1 + S_2 = e_1 + e_3 + (e_1 - e_3)\cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2.$$

5° On sait que la vitesse, suivant le rayon, est la longueur du rayon vecteur r de la surface d'onde qui coïncide avec le rayon. Établir que si ε'_1 et ε'_2 sont les angles du rayon lumineux avec les axes de réfraction conique extérieure, on a, pour les deux vitesses r_1 et r_2 relatives à une même direction (mais à deux ondes planes différentes,

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} = \left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_3}\right)\sin\varepsilon'_1 \sin\varepsilon'_2,$$
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_3} + \left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_3}\right)\cos\varepsilon'_1 \cos\varepsilon'_2.$$

6° Expliciter tous les résultats précédents dans le cas d'un milieu uniaxe.

Revision. — Vérifications expérimentales de la théorie de la double réfraction.

DÉTERMINATION DES VECTEURS $\mathcal{S}$, $\mathcal{N}$ ET $\mathcal{F}$.

Vecteur $\mathcal{S}$. — Résumons les propriétés du vecteur de composantes u, v, w, que nous désignerons par la lettre $\mathcal{S}$.

1° Tout d'abord, ces composantes ont pour expression

$$(1) \qquad u = u_0 \sin F, \qquad v = v_0 \sin F, \qquad w = w_0 \sin F,$$

Digitized by Google

avec

$$F = \omega t - kD + \varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{k} = V;$$

la famille d'ondes planes considérée ayant pour équation

$$(2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - D = 0.$$

2° Deux ondes planes P, P′ se propagent, en restant perpendiculaires à la direction α, β, γ, avec les vitesses V, V′ racines de l'équation du second degré en V^2,

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{e_1 - V^2} + \frac{\beta^2}{e_2 - V^2} + \frac{\gamma^2}{e_3 - V^2} = 0.$$

Les coefficients u_0, v_0, w_0 satisfont, d'autre part, aux conditions

$$(4) \qquad \frac{u_0}{\dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{V^2}{e_1}}} = \frac{v_0}{\dfrac{\beta}{1 - \dfrac{V^2}{e_2}}} = \frac{w_0}{\dfrac{\gamma}{1 - \dfrac{V^2}{e_3}}},$$

dans lesquelles V^2 est racine de l'équation (3).

3° *Les vibrations propagées u, v, w sont dans les plans* Q, Q′, *normaux aux ondes planes, qui passent respectivement par les axes de l'ellipse ε, intersection du plan d'onde origine* (*fig.* 101)

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

avec l'ellipsoïde E *d'équation*

$$e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 = 1.$$

D'autre part, les vitesses de propagation normale V et V′ sont mesurées par les inverses des demi-axes ρ_1, ρ_2 de ε.

4° Les droites qui joignent l'origine O aux points M, M′,

Digitized by Google

où les plans P et P′ touchent la surface d'onde (rayons), sont, la première, dans le plan Q, et la seconde, dans le plan Q′.

5° *La vibration* $\mathcal{S}$, *relative à la racine* V, *est perpendiculaire au rayon* OM, *et la vibration* $\mathcal{S}'$, *relative à la racine* V′, *est perpendiculaire à* OM′; les vibrations sont donc transversales par rapport aux rayons, mais ne sont pas contenues dans les plans d'onde.

Vecteur $\mathfrak{X}$. — Il y a une direction Δ à la fois perpendiculaire au rayon et parallèle au plan d'onde, c'est celle de la perpendiculaire au plan Q. Une vibration qui s'effectuerait suivant Δ serait donc transversale à la fois pour le rayon et pour l'onde.

Il est aisé de déduire du vecteur $\mathcal{S}$ (u, v, w) un vecteur, que nous désignerons par la lettre $\mathfrak{X}$, dirigé suivant Δ; il suffit pour cela d'en définir les composantes X, Y, Z en fonction des composantes u, v, w de $\mathcal{S}$ par les relations

$$(5)\quad X = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

En calculant les dérivées partielles d'après le Tableau (1), on a immédiatement

$$\begin{aligned} X &= k(v_0\gamma - w_0\beta)\cos F, \\ Y &= k(w_0\alpha - u_0\gamma)\cos F, \\ Z &= k(u_0\beta - v_0\alpha)\cos F. \end{aligned}$$

Ce vecteur (X, Y, Z) est perpendiculaire à la normale (α, β, γ) aux ondes, puisque la condition de perpendicularité

$$\alpha(v_0\gamma - w_0\beta) + \beta(w_0\alpha - u_0\gamma) + \gamma(u_0\beta - v_0\alpha) = 0$$

Digitized by Google

est une identité ; *le vecteur* $\mathfrak{N}$ *est donc dans le plan d'onde.*

Ce vecteur $\mathfrak{N}$ *est aussi perpendiculaire au rayon* OM. En effet, comme les paramètres directeurs du rayon sont proportionnels aux coordonnées

$$x = \alpha \frac{r^2 - e_1}{s - e_1}, \qquad y = \beta \frac{r^2 - e_2}{s - e_2}, \qquad z = \gamma \frac{r^2 - e_3}{s - e_3}$$

du point M, la condition de perpendicularité de $\mathfrak{N}$ et de OM peut s'écrire

$$\alpha(v_0\gamma - w_0\beta)\frac{r^2 - e_1}{s - e_1} + \beta(w_0\alpha - u_0\gamma)\frac{r^2 - e_2}{s - e_2}$$
$$+ \gamma(u_0\beta - v_0\alpha)\frac{r^2 - e_3}{s - e_3} = 0.$$

Après avoir remplacé u_0, v_0, w_0 par les valeurs proportionnelles (4), chassé les dénominateurs et divisé par S, il vient

$$(r^2 - e_1)(e_2 - e_3) + (r^2 - e_2)(e_3 - e_1) + (r^2 - e_3)(e_1 - e_2) = 0.$$

Or, cette relation est vérifiée, puisque le coefficient de r^2 et la partie indépendante de r^2 sont identiquement nuls.

Le vecteur $\mathfrak{N}$ est donc bien dirigé suivant Δ.

Vecteur $\mathfrak{J}$. — Les considérations précédentes suggèrent l'intervention possible d'une autre direction remarquable Δ_1, à savoir celle de la trace du plan Q sur le plan d'onde P. La droite Δ_1 est dans le plan d'onde, mais elle n'est plus comme $\mathfrak{N}$ perpendiculaire au rayon.

On obtient un vecteur, que nous désignerons par la lettre $\mathfrak{J}$, dirigé suivant Δ_1 en formant ses composantes ξ, η, ζ avec celles du vecteur $\mathfrak{N}$, comme ces dernières ont été formées à partir des composantes u, v, w de $\mathfrak{S}$. Il faut donc

Digitized by Google

poser

$$(6)\quad \xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

En explicitant ces expressions, on obtient sans difficulté

$$\xi = k^2[(\beta^2+\gamma^2)u_0 - v_0\,\alpha\beta - w_0\alpha\gamma]\sin F,$$
$$\eta = k^2[(\gamma^2+\alpha^2)v_0 - w_0\beta\gamma - u_0\beta\alpha]\sin F,$$
$$\zeta = k^2[(\alpha^2+\beta^2)w_0 - u_0\gamma\alpha - v_0\gamma\beta]\sin F.$$

Le vecteur $\mathfrak{F}$ est perpendiculaire à α, β, γ, puisque la condition de perpendicularité

$$\begin{aligned}&\alpha[(\beta^2+\gamma^2)u_0 - v_0\,\alpha\beta - w_0\alpha\gamma]\\ &+\beta[(\gamma^2+\alpha^2)v_0 - w_0\beta\gamma - u_0\beta\alpha]\\ &+\gamma[(\alpha^2+\beta^2)w_0 - u_0\gamma\alpha - v_0\gamma\beta] = 0\end{aligned}$$

est une identité; *le vecteur $\mathfrak{F}$ est donc le plan d'onde.*

Le vecteur $\mathfrak{F}$ est dans le plan Q.

Comme le plan Q a pour équation

$$x(e_3-e_2)\frac{S-e_1}{\alpha} + y(e_1-e_3)\frac{S-e_2}{\beta} + z(e_2-e_1)\frac{S-e_3}{\gamma} = 0,$$

la condition à vérifier est la suivante

$$\begin{aligned}&(e_3-e_2)\frac{S-e_1}{\alpha}[(\beta^2+\gamma^2)u_0 - v_0\alpha\beta - w_0\alpha\gamma]\\ &+(e_1-e_3)\frac{S-e_2}{\beta}[(\gamma^2+\alpha^2)v_0 - w_0\beta\gamma - u_0\alpha\beta]\\ &+(e_2-e_3)\frac{S-e_3}{\gamma}[(\alpha^2+\beta^2)w_0 - u_0\alpha\gamma - v_0\gamma\beta].\end{aligned}$$

En remplaçant u_0, v_0, w_0 par les valeurs proportionnelles (4) et ordonnant par rapport à α^2, β^2, γ^2, on constate sur-le-

Digitized by Google

champ que les coefficients de α^2, β^2, γ^2 sont identiquement nuls.

Le vecteur $\mathfrak{F}$ *est donc bien déterminé par la trace du plan* Q *sur le plan* P. Ce résultat s'applique évidemment à $\mathfrak{F}'$ (P′, Q′).

Systèmes d'équations différentielles respectivement vérifiés par les composantes des vecteurs ($\mathcal{S}$), ($\mathfrak{N}$) *et* ($\mathfrak{F}$).

Les composantes u, v, w du vecteur ($\mathcal{S}$) ont été déterminées par la condition de satisfaire aux équations (p. 357)

$$(\mathcal{S})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= e_1\left(\Delta u - \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= e_2\left(\Delta v - \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= e_3\left(\Delta w - \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Vecteur $\mathfrak{N}$. — Les composantes X, Y, Z du vecteur $\mathfrak{N}$ vérifient les équations suivantes :

$$(\mathfrak{N})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= e_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - e_3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= e_3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - e_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= e_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - e_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

En effet, en substituant, aux dérivées qui figurent dans la première équation de ce système, leurs valeurs tirées des expressions de X, Y, Z et remplaçant u_0, v_0, w_0 par les valeurs proportionnelles connues (4), on constate que chacun des deux membres a pour valeur

$$\frac{k^2\gamma\beta S^2(e_2 - e_3)}{(e_2 - S)(e_3 - S)}.$$

Digitized by Google

Vecteur $\mathfrak{F}$. — Par une substitution directe semblable à la précédente, on pourrait s'assurer que les composantes ξ, η, ζ de $\mathfrak{F}$ sont solutions des équations

$$(\mathfrak{F})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= e_1\,\Delta\xi - e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - e_2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} - e_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z},\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= e_2\,\Delta\eta - e_2\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - e_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z} - e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial y\,\partial x},\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= e_3\,\Delta\zeta - e_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2} - e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial z\,\partial x} - e_2\frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Mais on peut aussi déduire le système ($\mathfrak{F}$) du système ($\mathfrak{X}$). Ce dernier système peut en effet s'écrire, en utilisant la définition de ξ, η et ζ (6), sous la forme

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = e_2\frac{\partial\eta}{\partial z} - e_3\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = e_3\frac{\partial\zeta}{\partial x} - e_1\frac{\partial\xi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = e_1\frac{\partial\xi}{\partial y} - e_3\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}, - e_2\frac{\partial^2\eta}{\partial z\,\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = e_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z} - e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}.$$

Or l'ordre des différentiations étant arbitraire

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = e_1\,\Delta\xi - e_1\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - e_2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} - e_3\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z}.$$

Digitized by Google

Comme

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \xi,$$

la première équation du système se trouve explicitée. Les combinaisons

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

donneraient les deux autres équations.

Ces résultats jouent un rôle important en mécanique vibratoire. A la condition de douer le milieu de propriétés convenables, on peut considérer l'un quelconque de ces trois vecteurs comme représentant la vibration propagée par plans d'onde. Mais, comme tout ce qui concerne le plan lui-même est conservé, il n'y a rien à changer à ce qui précède, relativement à la propagation normale, à la surface d'onde, au rayon.

Pour ($\mathcal{S}$) Θ est différent de zéro (p. 359).

Pour ($\mathfrak{N}$) $\Theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ est nul; il en est de même pour ($\mathfrak{F}$).

Cela signifie, dans le langage de l'élasticité, que le milieu se comporte comme s'il était incompressible quand il propage ($\mathfrak{N}$) ou ($\mathfrak{F}$), et comme compressible quand il propage ($\mathcal{S}$).

Remarque. — Le théorème de Stokes (*voir* P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 9) permet de mettre, sous une forme facile à retenir, les relations entre les vecteurs u, v, w; X, Y, Z; ξ, η, ζ. On voit en effet :

1° Que le flux du vecteur X, Y, Z ($\mathfrak{N}$) est égal à la circu-

Digitized by Google

lation du vecteur u, v, w ($\mathcal{S}$)

$$(X, Y, Z) = \operatorname{curl}(u, v, w) \quad (^1);$$

2° Que le flux du vecteur ξ, η, ζ ($\mathcal{F}$) est égal à la circulation du vecteur X, Y, Z ($\mathfrak{X}$)

$$(\xi, \eta, \zeta) = \operatorname{curl}(X, Y, Z).$$

Interprétation électrique des vecteurs $\mathcal{S}$, $\mathfrak{X}$, $\mathcal{F}$. — Pour donner aux idées de Faraday, sur le mécanisme de la propagation des actions électriques à travers l'espace, une figure mathématique, Maxwell s'est inspiré, en l'adaptant aux particularités des phénomènes électriques à expliquer, du mécanisme de la propagation des déformations élastiques.

Au point (x, y, z) du milieu qui transmet les actions correspond un champ électromoteur complexe dont nous désignerons les composantes par u, v, w et un champ magnétique total de composantes X, Y, Z. A la déformation élastique en x, y, z, Maxwell substitue un courant d'électricité de composantes i_x, i_y, i_z, suivant les directions principales du milieu, telles que

$$4\pi i_x = K_1 \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 4\pi i_y = K_2 \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad 4\pi i_z = K_3 \frac{\partial w}{\partial t}.$$

a. Au contour rectangulaire de centre (x, y, z) et de côtés dy, dz, convenablement parcouru par un pôle unité, correspond un travail qui a pour mesure, d'une part (*relation d'Ampère*),

$$4\pi i_x \, dy \, dz$$

---

(1) Au terme *curl* (keurl) on substitue parfois celui de *rotation* ou encore de *vort*.

Digitized by Google

et, d'autre part (*calcul direct*),

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\, dz,$$

puisque les composantes Y, Z prennent respectivement sur les côtés du contour les valeurs

$$Y \pm \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{dz}{2}, \qquad Z \pm \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{dy}{2}.$$

On a donc les relations

$$(a)\quad \begin{cases} (1)\quad K_1 \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ \text{et de même} \\ (2)\quad K_2 \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\ (3)\quad K_3 \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}. \end{cases}$$

b. En écrivant d'autre part que la dérivée par rapport au temps, changée de signe, du flux magnétique à travers le rectangle élémentaire (dy, dz) (*relation de Faraday*) est égale à la force électromotrice induite dans son contour (*calcul direct*), il vient, pour un milieu de perméabilité constante μ,

$$(b)\quad \begin{cases} (4)\quad -\mu \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ (5)\quad -\mu \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ (6)\quad -\mu \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

c. En prenant la dérivée par rapport à t des deux membres

Digitized by Google

de (1), celle de (6) par rapport à y et de (5) par rapport à z puis formant la combinaison

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

on obtient, en tenant compte de la signification analytique des notations Δu et Θ,

$$K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$K_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v - \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

et de même

$$K_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta w - \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Il suffit de comparer ce système d'équations au système (3) (p. 357) pour voir qu'on peut considérer la vibration ($\mathcal{S}$) comme un champ électromoteur, mais il faut qu'alors

$$e_1 K_1 = e_2 K_2 = e_3 K_3 = \mu - 1$$

ou encore, pour $\mu = 1$, que les pouvoirs inducteurs du milieu propagateur soient liés aux indices de réfraction de ce milieu par la relation

$$K = N^2.$$

d. En éliminant u, v, w entre les équations (*a*) et (*b*), et pour $\mu = 1$, on retrouve le système ($\mathfrak{M}$), si la condition

$$K_p e_p = 1$$

est remplie, par suite le vecteur ($\mathfrak{M}$) peut être considéré comme un champ magnétique.

Digitized by Google

e. De même le vecteur ($\mathfrak{F}$) répond au déplacement de Maxwell

$$\frac{1}{4\pi}K_1 u, \qquad \frac{1}{4\pi}K_2 v, \qquad \frac{1}{4\pi}K_3 w.$$

Ces équations générales ont reçu un grand nombre d'applications que nous n'avons pas à étudier car notre but actuel est seulement d'indiquer comment, par le développement progressif des théories, la vibration lumineuse est devenue une grandeur électrique.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Propriétés des vibrations.

MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL.

	Pages.
Loi du mouvement	1
Diagramme du mouvement	3
Représentation de la vitesse et de l'accélération	3
Relation entre l'élongation et l'accélération	4
Période du pendule simple	5
Période d'oscillation d'une colonne liquide	6
Relation entre le mouvement rectiligne sinusoïdal et le mouvement circulaire uniforme	9
Réalisation cinématique du mouvement sinusoïdal. — Excentrique à cadre, etc	11
Phase	12
Effet d'une variation instantanée de la vitesse sur l'amplitude et la phase.	16
Énergie	18
Énergie cinétique moyenne	19
Généralisation	19
Importance du mouvement sinusoïdal	23
Calcul des coefficients du développement de Fourier	24
Analyse stroboscopique d'un phénomène périodique sinusoïdal ou non	26
Coïncidences dans les mouvements sinusoïdaux	28
Fausses coïncidences	30
Application au diapason et au pendule	30
Production de fréquences vibratoires élevées	32
Équation des cordes vibrantes	34
Phénomènes sonores	38

Digitized by Google

MOUVEMENT SINUSOIDAL AMORTI.

Pages.
Loi du mouvement 39
Diagramme du mouvement 40
Loi des élongations successives 42
Décrément 43
Détermination expérimentale des constantes d'un mouvement sinusoïdal amorti. — Représentation de la vitesse 44
Intervention du mouvement circulaire uniforme dans la représentation des éléments du mouvement sinusoïdal amorti 45
Relation entre l'élongation, la vitesse et l'accélération 51
Les différents aspects du mouvement des appareils amortis expliqués par les propriétés de l'équation générale du deuxième ordre 54
Calcul de la force amortissante dans les amortisseurs usuels 56
1° Oscillations des colonnes liquides 56
2° Amortisseur à air 58
Débit 63
Force amortissante 64
Amortisseurs par induction 65
Moment d'amortissement dans le cas du galvanomètre à cadre ; équation du mouvement 68
Effet des impulsions communiquées à un système mobile lors de son passage par la position d'équilibre 72
Le système ne reçoit qu'une impulsion 72
Galvanomètre à aimant mobile 73
Galvanomètre unipolaire. Problème 75
Le système reçoit une impulsion à chaque passage par la position d'équilibre (Méthode de répétition) 79
Avantage de la méthode de répétition 83
Extension des formules précédentes aux phénomènes électriques 84
Synchronisation par action continue harmonique 88
Id. par impulsions périodiques 89
Égalisation des périodes de deux systèmes oscillants 92
L'équipage S_2 est maintenu dans une position fixe par les chocs 93

COMPOSITION DES VIBRATIONS.

Composition des vibrations parallèles 94
Composition de deux vibrations parallèles en utilisant la représentation

Digitized by Google

Pages.

par le mouvement circulaire uniforme..... 97
Généralisation : Polygone de Fresnel..... 100
Application de la règle de Fresnel à quelques cas particuliers..... 103
Amplitude et phase du mouvement résultant : 1° Emploi de formules... 105
2° Emploi de la méthode géométrique. — Phase..... 106
3° Maximums principaux et secondaires..... 109
Cas où les phases sont en progressions arithmétiques et les amplitudes en progressions géométriques..... 113
Application du polygone de Fresnel à la composition des *f. é. m.* d'induction. Classification des génératrices..... 116
Loi des *f. é. m.* induites..... 117
Association des *f. é. m.* induites : Groupement alternatif..... 118
Groupements polyphasés..... 119
Montage en étoile..... 121
Groupement dans l'espace par l'artifice du collecteur à touches : force électromotrice constante..... 121

VIBRATION ELLIPTIQUE.

Composition des vibrations harmoniques rectangulaires..... 124
Points de tangence..... 126
Sens de circulation du mobile sur l'ellipse..... 129
Vitesse de circulation du mobile..... 132
Vibrations semblables..... 133
Balancement du système des axes lorsque φ varie..... 134
Famille d'elliptiques dont le système des axes est fixe..... 135
Manière d'obtenir automatiquement une famille de vibrations elliptiques. 136
Composition de deux mouvements sinusoïdaux rectangulaires de périodes très voisines : 1° Au moyen de deux diapasons..... 136
2° Au moyen de deux pendules..... 137
3° Au moyen d'un seul pendule..... 138
Périodicité des retours..... 139
Différence des carrés des axes ou des amplitudes principales..... 144
Rapport des axes..... 144
Quelques équivalences cinématiques entre les vibrations rectilignes, circulaires et elliptiques..... 146
Composition des mouvements vibratoires par graphiques tracés sur papier métrique..... 148

Digitized by Google

IMAGE CINÉMATIQUE DE LA PROPAGATION DES VIBRATIONS HARMONIQUES TRANSVERSALES.

Pages.
Structure d'un rayon transversal 150
Propagation 152
Transversalité de la vibration propagée 155
Phases relatives aux différents points de Z'Z :
Période du rayon : longueur d'onde 156
Différence de phase engendrée par une différence de marche 157
Chemins équivalents 159
Différence de marche relative à deux points d'un même rayon qui traverse plusieurs milieux 160
Permanence de l'état vibratoire d'une source 161
Interférences simultanées au même point 162
Cas des milieux biréfringents 164
Polarisation de l'onde émergente 166
Restitution de la vibration rectiligne à partir de la vibration elliptique. 167

CALCUL DE LA DIFFÉRENCE DE MARCHE GÉOMÉTRIQUE DANS QUELQUES CAS.

Cas de deux centres d'émission concordants 170
Différence de marche entre des rayons parallèles issus de l'axe X'X et faisant avec OY l'angle θ dans le plan XOY 171
Différence de marche, en un point P de OY, des rayons issus de points M pris sur X'X 172
Même problème que précédemment, en substituant à la droite X'X une circonférence C de rayon *a* 174
Zones 176
Différences de marche relatives aux rayons qui coïncident avec une route de Fermat 179
Route de Fermat à travers une série de milieux séparés par des plans parallèles 182
Route de Fermat comportant des réflexions et des réfractions 183
Différence de marche imprimée au rayon par l'interposition d'une lame d'épaisseur *e* 183
Différence de marche δ relative aux deux parcours AMB (réflexion en M) et AMNM'B' (réfraction en M, réflexion en N) et pour une lame homogène d'épaisseur uniforme *e* 185

Digitized by Google

Pages.

Chemins équivalents à travers un système de milieux séparés par des surfaces sphériques dont les centres sont sur une même ligne droite.. 187
Retour à la composition des vibrations. — Rôle de la différence de marche..... 190
Les vibrations proviennent de deux centres d'émission..... 190
Les centres d'émission en nombre infini sont distribués le long d'une ligne droite et la totalisation s'opère dans une direction donnée..... 192
Les centres d'émission appartiennent à des segments de la droite X'X égaux et régulièrement espacés..... 194
Les centres d'émission sont répartis sur une circonférence et la totalisation s'opère en un point..... 196
Intégrales de Fresnel..... 197
Table d'intégrales de Fresnel..... 198
Représentation de la Table des intégrales de Fresnel par une courbe... 199
Les éléments d'émission appartiennent à une surface sphérique..... 199
Les différents points d'un plan XOY envoient des mouvements vibratoires dans la direction α, β, γ..... 204

SECONDE PARTIE.

Déformations et vibrations des milieux. — Ondes.

COEFFICIENTS DE DÉFORMATIONS.

Traction ou extension : Module d'Young..... 210
Mesure du coefficient E..... 211
Coefficient de Poisson..... 214
Observations de Hooke..... 215
Dilatation cubique élastique..... 215
Expression des actions P_1, Q_1, R_1, en fonction de Θ, E, σ, ε, ε', ε''.... 217
Expression analytique des tensions N..... 218
Déformation mettant en évidence la seule constante μ..... 221
Coefficient de compression uniforme..... 222
Coefficient d'élasticité dans le cas où la compression s'exerce par plans parallèles dans un milieu indéfini..... 223
Flexion. Condition d'équilibre..... 225
Calcul de f et de $\Sigma f\, ds\, z$..... 227
Angle de flexion..... 227

Digitized by Google

Pages.
Calcul de la flèche 228
Applications : Cas d'une pièce rectangulaire 228
Cas d'une pièce de section circulaire de rayon R et de longueur l... 229
Cas d'un tube circulaire 230
Courbe suivant laquelle se disposent les filets de la tige fléchie..... 230
Dynamomètre de Poncelet 233
Oscillations de flexion : Vibrations transversales des verges. Diapason.. 233
Équation du mouvement 236
Fréquence des vibrations de la tige 240
Position des nœuds 241
Étude expérimentale du diapason 243
Torsion : Courbe suivant laquelle se dispose un filet du fil supposé cylindrique 247
Lois de la torsion déduite de la théorie.. 248
Déformations produites par des forces tangentielles 249
Égalité des coefficients K et μ 250
Détermination expérimentale du coefficient μ 251
Moment d'inertie des solides usuels 251
Déplacement parallèle de l'axe 255
Moments pour toutes les droites passant par un point O 256
Détermination expérimentale du moment d'inertie d'un solide quelconque par rapport à un axe passant par son centre de gravité G 259
Oscillations de torsion 260
Équations d'équilibre d'un système élastique. — Définitions et hypothèses. 260
Forme usuelle des équations d'équilibre 264
Équilibre du tétraèdre élémentaire 265
Application. — Cas des fluides 268
Distribution de la tension en un point : Variation de $\mathfrak{N}$ 269
Ellipsoïde des efforts de Lamé 271
Détermination de la tension p en un point 272
Relations entre les déformations en un point du milieu et les (N, T) concernant ce point 273
Détermination des cosinus directeurs d'une droite du milieu après la déformation 274
Introduction dans les équations d'équilibre des dérivées du déplacement u, v w, des divers points du milieu 278
Cas général. — Aperçu sur la méthode de réduction des coefficients.... 279

Digitized by Google

Pages.

Équations d'équilibre en fonction des déformations. — Cas des milieux isotropes 282

MOUVEMENT DANS LES MILIEUX ÉLASTIQUES ISOTROPES.

Équations du mouvement 283
Remarque 284

MOUVEMENTS PAR ONDES PLANES COMPATIBLES AVEC LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE, HOMOGÈNE ET ISOTROPE.

Déplacement longitudinal 285
Déplacement transversal 286
Résolution de l'équation $e\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 287
Ondes longitudinales 290
Ondes transversales 290
Propagation des déplacements 291
Cas particuliers de propagation de mouvement 295
Propagation d'un déplacement longitudinal dans une tige solide cylindrique 295
Propagation d'une torsion dans un fil cylindrique 297
Application numérique 299
Manifestation de la propagation d'un mouvement dans les solides 299
Propagation dans les fluides 300
Les fluides ne peuvent pas propager d'ondes à déplacement transversal. 301
Propagation longitudinale 301
Application aux gaz 302
Propagation isotherme 302
Influence de la température 303
Influence de la densité 303
Influence de l'état hygrométrique 304
Propagation adiabatique 304
Propagation d'un ébranlement électrique le long d'un conducteur doué de capacité et de self-induction 305

ONDES HARMONIQUES STATIONNAIRES.

Propriétés de l'état stationnaire. — Plans où le mouvement est nul dans le milieu quel que soit t 310

Digitized by Google

Pages.
Plans ventraux 311
Répartition de l'élongation 312
Répartition des dilatations 313
Propriétés des plans ventraux au point de vue de la condensation 313
Expériences manifestant les nœuds et les ventres 314
Calcul de la température à la tranche x dans le mouvement vibratoire harmonique stationnaire (milieu gazeux) 317
Conséquences de conditions imposées *a priori* à un milieu dans lequel on veut installer un mouvement vibratoire harmonique stationnaire 318
Interprétation de l'état stationnaire par la composition de deux ondes se propageant en sens inverse et dont les vibrations s'effectuent dans des directions parallèles 321
Réflexion avec changement de signe 324
Généralité des résultats précédents 325
Exercice relatif au cas où les deux mouvements superposés ont des propriétés voisines 328
Application à l'acoustique. — Des sons qu'un tuyau peut rendre et des états harmoniques stationnaires qui peuvent s'y installer 329
Relation entre la note fondamentale relative à un tuyau ouvert et celle relative à un tuyau fermé de même longueur 331
Tiges vibrant longitudinalement 332
Corde vibrante 335

SUPERPOSITION D'HARMONIQUES DANS UN SYSTÈME VIBRANT.

Formes que peut prendre une corde selon le mode d'attaque et le point attaqué 339
La corde est pincée en son milieu 342
On opère par percussion (piano) 344
On utilise l'archet (violon) 346
Objectivité des termes de U et plus généralement des termes d'un développement de Fourier 346
Problème de Döppler 349

ÉTHER LUMINEUX, EXTENSION DES ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ.

Éther 354
Théorie mécanique de la propagation des ondes lumineuses 355

Digitized by Google

Pages.

Equations des petits mouvements de l'éther 356
Projections sur le plan d'onde P de la vibration propagée 360
Surface des vitesses normales 362
Sections cycliques 365
Direction des axes de l'ellipse 367
Surface d'onde 369
Diverses formes de l'équation de la surface d'onde 372
Décomposition de la surface d'onde 373
Section de la surface d'onde par les plans de coordonnées 374
Plans tangents aux deux nappes 379
Direction de la vibration u, v, w 378
Rôle des plans déterminés par la normale à l'onde plane et les axes optiques 379
Indices principaux 380
Réfraction conique intérieure 381
Réfraction conique extérieure 382
Corrélation entre la surface d'onde et la surface polaire réciproques 383
Détermination des vecteurs $\mathcal{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}$ 384
Interprétation électrique des vecteurs $\mathcal{S}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{F}$ 392

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

FOUND IN LIBRARY

JUN 2 1914

Digitized by Google

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
48654 Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google